



LE SIMMETRIE NEI SOLIDI

ARGOMENTI:

SOLIDI
PLATONICI

SIMMETRIE
NEI SOLIDI
PLATONICI

SOLIDI
ARCHIMED
EI

SIMMETRI
E NEI
SOLIDI
ARCHIMED
EI

I SOLIDI PLATONICI

I solidi platonici sono poliedri con facce date da poligoni regolari e tali da essere tutte uguali tra loro. I solidi platonici sono i poliedri che presentano la massima simmetria.

In totale esistono 5 tipi di solidi platonici:

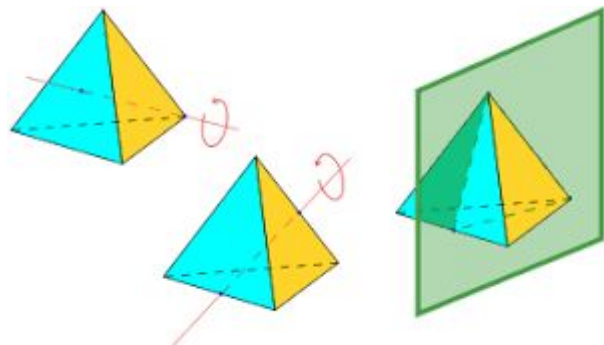
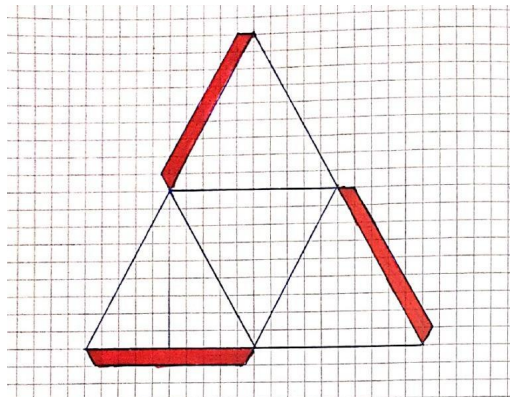
- Il tetraedro regolare
- L'esaedro regolare
- L'ottaedro regolare
- Il dodecaedro regolare
- L'icosaedro regolare

Un poliedro convesso è un solido platonico se:

1. Tutte le sue facce sono poligoni regolari convessi congruenti
2. Nessuna delle sue facce interseca le altre se non negli spigoli
3. In ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce.

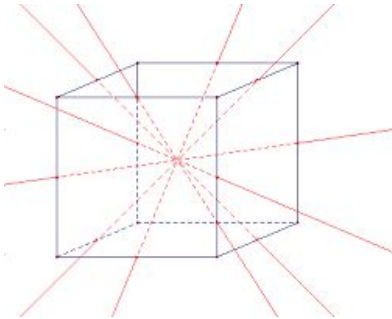
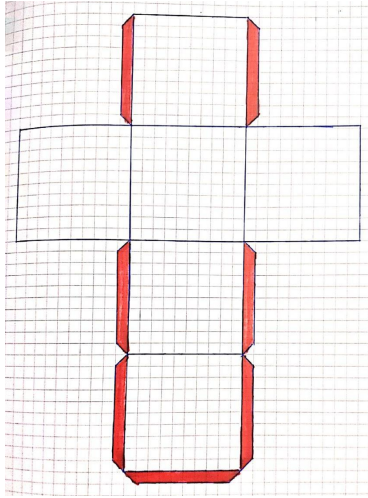
LE SIMMETRIE NEI SOLIDI PLATONICI

Per comprendere al meglio questa spiegazione è fondamentale conoscere il significato di piano di simmetria. Un piano di simmetria è un piano che divide il solido in due porzioni esattamente uguali. Le due porzioni della figura geometrica tagliate dal piano di simmetria sono l'una l'immagine speculare dell'altra.



Il tetraedro regolare ha 4 piani di simmetria, quelli che passano per uno spigolo e per il punto medio dello spigolo opposto.

Ha 3 assi di simmetria binari, quelli che congiungono i punti medi di due spigoli opposti. Le 4 altezze relative alle facce sono **assi di simmetria ternaria**, vale a dire si può portare il tetraedro su sé stesso facendolo ruotare intorno ad una di queste rette di $\frac{1}{3} \times 360$ e di $\frac{2}{3} \times 360$.



Gli assi di simmetria di un cubo sono tredici:
 tre assi di simmetria che passano per i centri di due facce opposte; sei assi di simmetria che passano per i punti medi di due spigoli opposti; quattro assi di simmetria che passano per due vertici opposti.

In totale dunque sono presenti 24 rotazioni:

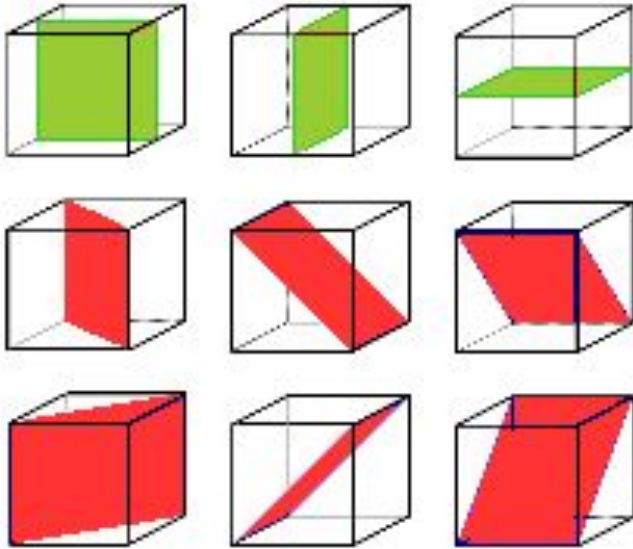
- nel caso degli assi di simmetria che passano per i centri di due facce opposte sono presenti rotazioni $k \times 360^\circ$ con $k=1,2,3,4$; la rotazione di un giro completo però ($k=4$) determina sempre l'identità. Sono individuate dunque non 12, ma **10 simmetrie**.

- ▣ Nel caso dei 6 assi di simmetria che passano per i punti medi di due spigoli opposti. Le rotazioni possibili sono unicamente di 180° , identificando dunque un totale di **6 simmetrie**.
- ▣ Nel caso degli assi che passano per due vertici opposti, il cubo può essere rotato di $k \times 120^\circ$ con $k=1,2$; per un totale di **8 simmetrie**.

Nell'esaedro regolare sono presenti 15 roto-riflessioni:

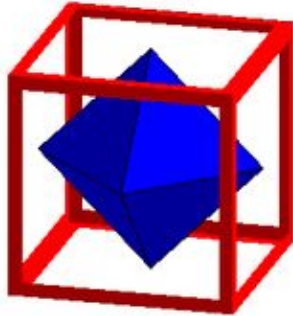
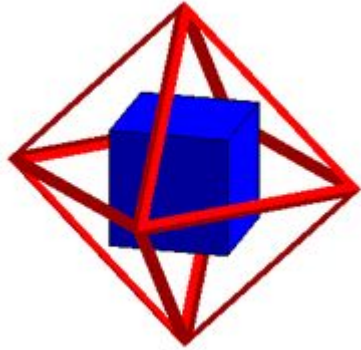
- ▣ Ruotando di $k \times 90^\circ$ con $k=1,2,3$ attorno ad uno dei 3 assi di ordine 4 e poi compiendo una riflessione rispetto al piano di simmetria perpendicolare all'asse di rotazione. Si sarebbero quindi trovate altre 9 simmetrie, ma, nel caso dell'angolo di 180° ($k=2$), ciascuna roto-riflessione coincide con la riflessione centrale, dunque le nuove simmetrie risultano in effetti solo 7;
- ▣ Altre ottenute ruotando di un angolo pari a $60^\circ + k \cdot 120^\circ$ con $k=0,1,2$ e assi passanti per due vertici opposti. Poiché tali assi sono 4, verrebbero a configurarsi altre 12 simmetrie, ma ancora una volta per $k=1$ si ritrova la riflessione centrale, dunque le nuove simmetrie risultano 8.

(fonte facoltà di matematica dell'università di Palermo)



Per ogni faccia del cubo passano 4 piani di simmetria perpendicolare ad essa; sono gli stessi piani di simmetria passano per la faccia opposta. Se prendiamo una faccia ad essa contigua abbiamo altre 3 piani di simmetria perpendicolari ad essa (uno era già conteggiato tra i precedenti 4); sono gli stessi piani di simmetria che passano per la faccia opposta. Se consideriamo una delle due rimanenti facce opposte contigue a quella iniziale, abbiamo altre 2 piani di simmetria perpendicolari ad essa (due erano già conteggiati tra i precedenti 3 o tra i precedenti 4). **In tutto vi sono $4+3+2 = 9$ piani di simmetria.**

Il cubo dunque presenta 48 simmetrie.



L'ottaedro regolare, essendo il poliedro duale del cubo, presenta la stessa quantità di simmetrie: 24 simmetrie rotazionali e 24 simmetrie non rotazionali, per un totale di 48 simmetrie totali.

Il poliedro duale di un poliedro (P) è un poliedro (Q), tale che ad ogni vertice di P corrisponde una ed una sola faccia di Q.

Nel caso dei solidi platonici, il tetraedro è autoduale (duale a sé stesso), il cubo e l'ottaedro sono l'uno il duale dell'altro, stessa cosa per l'icosaedro e il dodecaedro, l'uno il duale dell'altro.

I SOLIDI ARCHIMEDEI

Un solido archimedeo o semiregolare è un poliedro convesso le cui facce sono costituite da due o più tipi di poligoni regolari e i cui vertici sono omogenei. Si richiede inoltre che il poliedro non sia un prisma o un antiprisma.

- ▣ **Il cubottaedro**
- ▣ L'icosidodecaedro
- ▣ Il tetraedro troncato
- ▣ **Il cubo troncato**
- ▣ **L'ottaedro troncato**
- ▣ Il dodecaedro troncato
- ▣ L'icosaedro troncato
- ▣ Il rombicubottaedro
- ▣ Il cubottaedro troncato

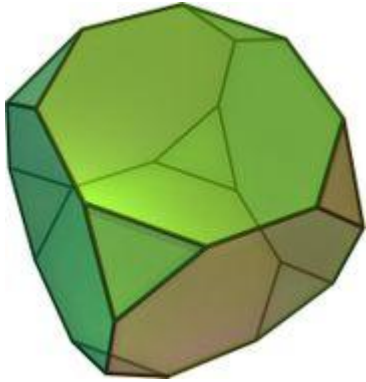
Le proprietà dei vertici:

Poiché i vertici sono omogenei, questi sono tutti uguali. Le cuspidi intorno ai vertici, dunque, sono tutte identiche.

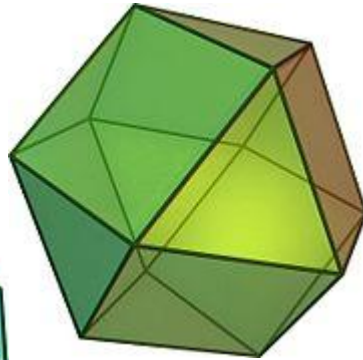
Le proprietà degli spigoli:

Gli spigoli di un poliedro archimedeo hanno tutti la stessa lunghezza: questo è dovuto al fatto che le facce sono tutti poligoni regolari. La lunghezza a di uno spigolo è quindi un parametro che determina la grandezza globale del poliedro: variazioni di a trasformano il poliedro tramite similitudine. Conseguentemente, volume e area di superficie di un poliedro archimedeo sono calcolati in funzione di a .

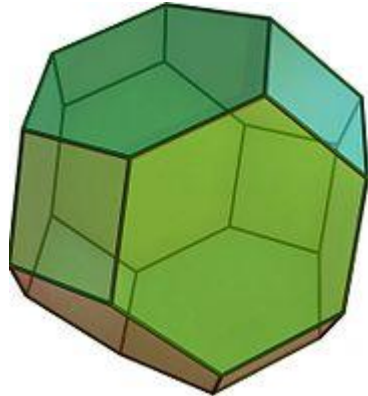
IL CUBO TRONCATO, IL CUBOTTAEDRO E L'OTTAEDRO TRONCATO



In geometria solida il cubo troncato, o esaedro troncato, è uno dei 13 solidi platonici ed è ottenuto tagliando le cuspidi del cubo. Ha 14 facce regolari, di cui **6 ottagoni e 8 triangoli**.



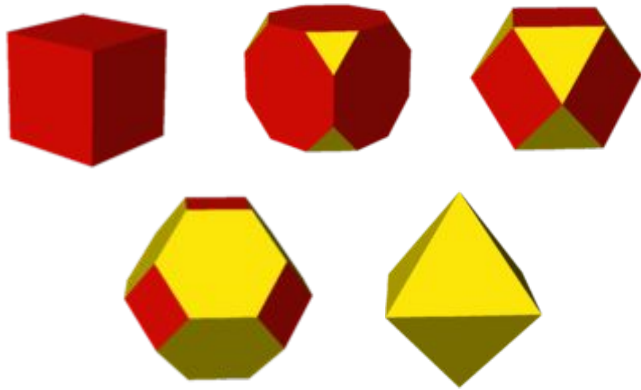
Il cubottaedro, è ottenuto allo stesso modo: tagliando le cuspidi del cubo, ma a differenza del cubo troncato, è costituito da 14 facce regolari di cui **6 quadrati e 8 triangoli**.



Infine l'ottaedro troncato viene ottenuto troncando le cuspidi dell'ottaedro regolare ed è anch'esso costituito da 14 facce regolari: **8 esagonali e 6 quadrate**.

IL CUBO TRONCATO, IL CUBOTTAEDRO E L'OTTAEDRO TRONCATO

La transazione dal cubo all'ottaedro:

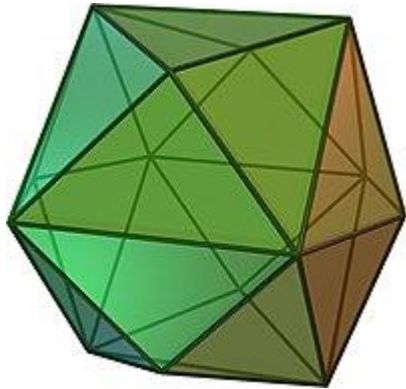
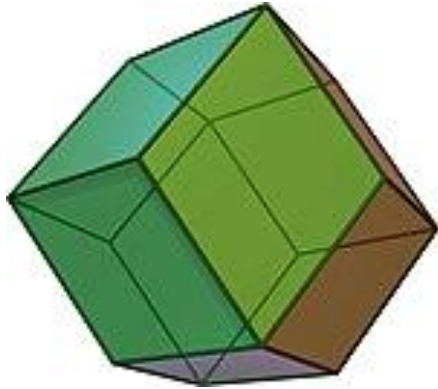
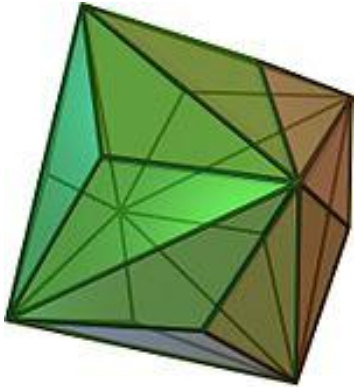


Perché parlare di tre solidi platonici contemporaneamente?

Perché tutti e tre condividono lo stesso gruppo di simmetrie del cubo e dell'ottaedro, ovvero il gruppo delle simmetrie ottaedrali.

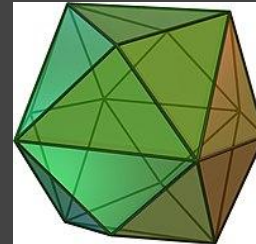
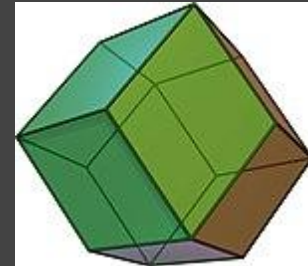
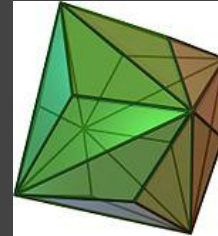
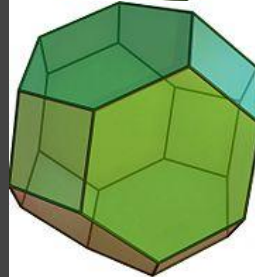
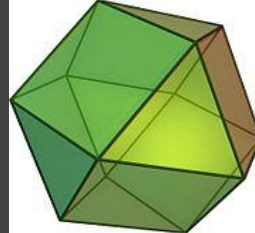
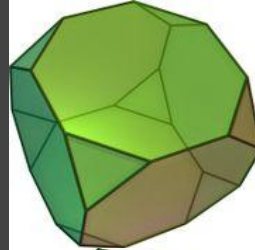
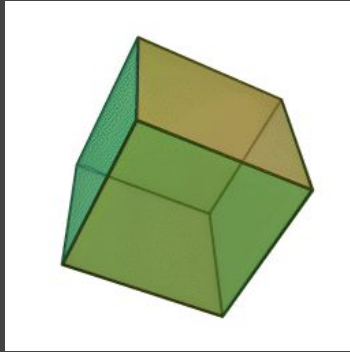
Allo stesso tempo dunque, i duali del cubo troncato, del cubottaedro e dell'ottaedro troncato, presenteranno anch'essi le stesse simmetrie del gruppo ottaedrale.

IL CUBO TRONCATO, IL CUBOTTAEDRO E L'OTTRAEDRO TRONCATO



Il tracisottaedro (duale del cubo troncato), il dodecaedro rombico (duale del cubottaedro) ed il tetracisesaedro (duale dell'ottaedro troncato) essendo dunque i solidi di Catalan (o solidi archimedei duali) di solidi che condividono la stessa simmetria, fanno anch'essi parte del gruppo di simmetrie ottaedrali.

IL GRUPPO DI SIMMETRIE OTTAEDRALI





**GRAZIE PER
L'ATTENZIONE**

Presentazione di Lorenzo Miccio