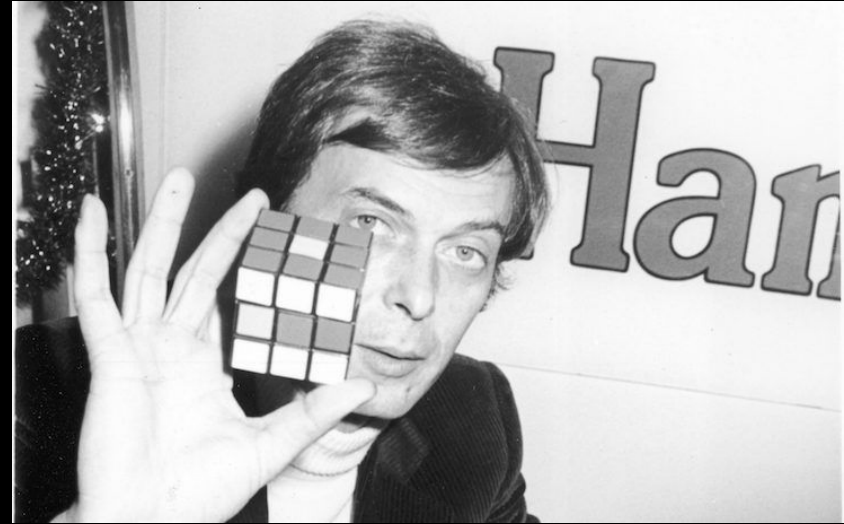




Il cubo di Rubik e i
gruppi finiti

La storia del cubo di rubik

A metà degli anni '70, Ernő Rubik lavorava al Dipartimento di Interior Design della Moholy-Nagy University of Art and Design a Budapest. Nonostante si dicesse che Rubik avrebbe costruito il cubo per insegnare ai suoi studenti a comprendere gli oggetti di tre dimensioni, il suo vero obiettivo era di risolvere il problema strutturale di muovere le singole parti in modo indipendente senza far crollare l'intero meccanismo. Non si rese conto di aver creato un rompicapo finché non mescolò per la prima volta il cubo e cercò di ricomporlo.

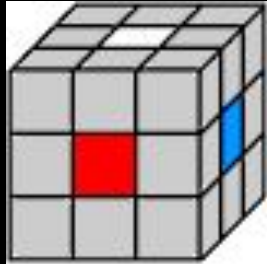


La storia del cubo di rubik

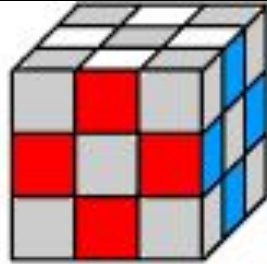
Il cubo originale differiva lievemente da quello odierno: era monocolore, di legno e con gli angoli smussati; inoltre, all'inizio si diffuse solo tra i matematici ungheresi, interessati ai problemi statistici e teorici che il cubo poneva. Dopo qualche anno nel 1979 diventò molto popolare e veniva venduto in tutti i negozi di giocattoli.



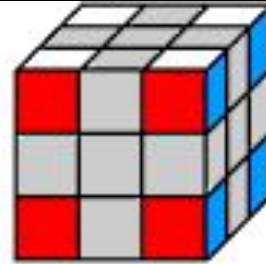
Descrizione del cubo di Rubik



6 centri



12 spigoli



8 angoli

Il cubo di Rubik è formato da sei facce una di un colore diverso e da 26 cubetti. Esistono vari tipi di cubetti in base al numero di facce presenti all'esterno: ci sono i centri che sono uno per faccia e presentano un solo colore; ci sono gli spigoli che invece sono 12 e presentano 2 colori all'esterno; e infine ci sono gli angoli che sono 8 e presentano 3 colori.

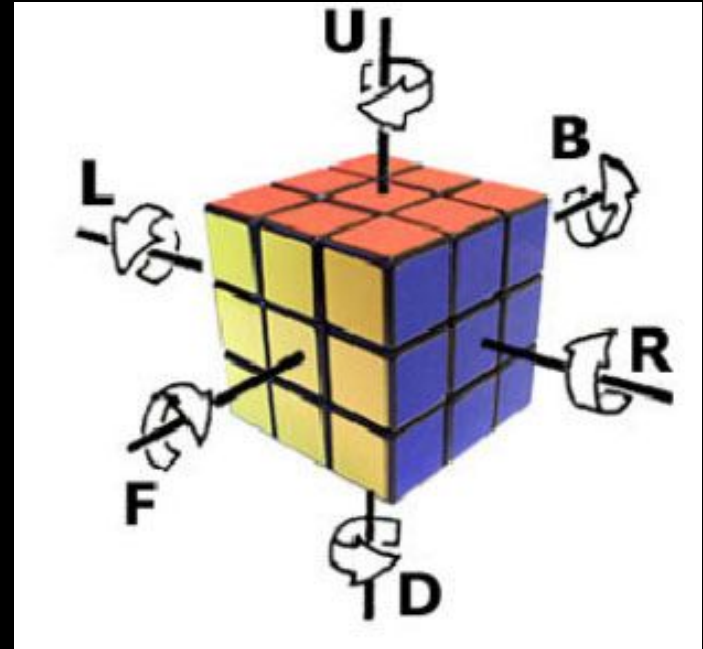
Nomenclatura delle mosse

90°	180°	-90°
<i>F</i> Rotazione in senso orario della faccia frontale	<i>F</i> ² Doppia rotazione in senso orario della faccia frontale	<i>F'</i> Rotazione in senso antiorario della faccia frontale
<i>B</i> rotazione in senso orario della faccia posteriore	<i>B</i> ² doppia rotazione in senso orario della faccia posteriore	<i>B'</i> rotazione in senso antiorario della faccia posteriore
<i>U</i> rotazione in senso orario della faccia superiore	<i>U</i> ² doppia rotazione in senso orario della faccia superiore	<i>U'</i> rotazione in senso antiorario della faccia superiore
<i>D</i> rotazione in senso orario della faccia inferiore	<i>D</i> ² doppia rotazione in senso orario della faccia inferiore	<i>D'</i> rotazione in senso antiorario della faccia inferiore
<i>L</i> rotazione in senso orario della faccia sinistra	<i>L</i> ² doppia rotazione in senso orario della faccia sinistra	<i>L'</i> rotazione in senso antiorario della faccia sinistra
<i>R</i> rotazione in senso orario della faccia destra	<i>R</i> ² doppia rotazione in senso orario della faccia destra	<i>R'</i> rotazione in senso antiorario della faccia destra

Mosse del cubo di Rubik

Una mossa consiste in una rotazione di una delle 6 facce: 90° , 180° o -90° . Il quadrato centrale di ciascuna faccia del cubo ruota attorno al proprio asse rimanendo quindi nella stessa posizione.

Le mosse sono descritte secondo la notazione di Singmaster, un insegnante statunitense ed ex professore di matematica presso la London South Bank University di Londra, uno tra i primi promotori del cubo di Rubik.



I gruppi

In matematica, un gruppo finito è una struttura algebrica formata da un insieme S (non vuoto) con una operazione binaria interna, ovvero una funzione che da due elementi dell'insieme ne restituisce un altro sempre appartenente allo stesso insieme. Devono, inoltre essere soddisfatte tre proprietà:

1. Esistenza di un elemento neutro, cioè un elemento che composto con un altro restituisce il secondo invariato.
2. Proprietà associativa, cioè una proprietà che al variare dell'ordine degli elementi in una operazione non fa cambiare il risultato.
3. esistenza dell'inverso di ogni elemento, (elemento simmetrico) cioè un elemento che composto con il suo inverso dia l'elemento neutro.

Il gruppo del cubo di Rubik

Il gruppo del cubo di Rubik è un gruppo costituito dalle mosse del cubo di Rubik. Ogni elemento dell'insieme corrisponde ad una mossa, che può essere una qualsiasi sequenza di rotazioni delle facce del cubo. Questi elementi ci permettono di rappresentare ogni configurazione del cubo, specificando le mosse necessarie per ottenerla a partire da quella iniziale (quando il cubo viene considerato risolto). Infatti, scelta la configurazione iniziale, c'è una corrispondenza biunivoca tra ogni configurazione possibile del cubo e gli elementi dell'insieme. L'operazione binaria è la composizione delle mosse del cubo: una composizione di mosse corrisponde ad una sequenza di mosse effettuate una dopo l'altra.

Il gruppo del cubo di Rubik

Il gruppo del cubo di Rubik è un sottogruppo del gruppo simmetrico generato dalle sei permutazioni corrispondenti alle sei rotazioni in senso orario. Quindi ogni configurazione realizzabile attraverso una sequenza di mosse appartiene al gruppo. Il gruppo del cubo di Rubik è un gruppo non abeliano in quanto la composizione delle mosse non è commutativa: infatti, eseguire due sequenze di mosse in ordine differente porta a configurazioni finali diverse.

Sottogruppo

Un sottogruppo, in matematica, è un gruppo formato da un sottoinsieme di un insieme di un altro gruppo con la stessa operazione binario. Il sottogruppo fa sempre parte del gruppo di partenza.

Ad esempio preso in considerazione il gruppo formato dai numeri naturali con l'operazione somma, un dei sottogruppi è quello formato dai numeri naturali pari con la stessa operazione binaria.

Gruppo dei numeri naturali

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Operazione binaria +

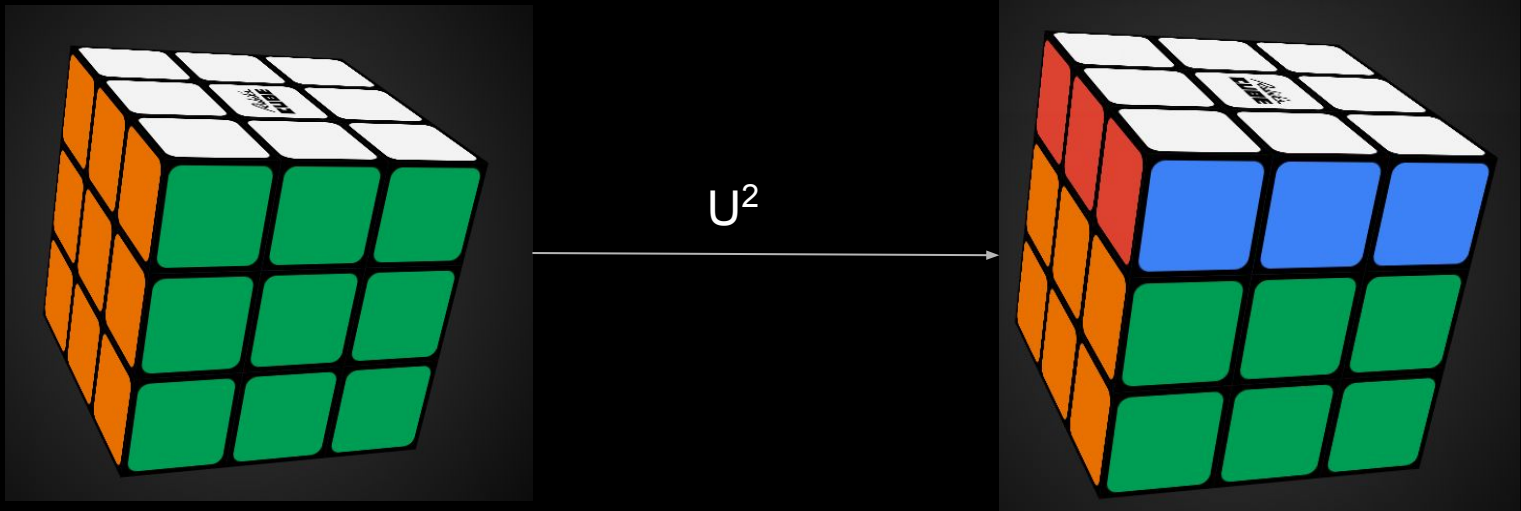
Sottogruppo

$S = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Operazione binaria +

Sottogruppo C_p

Il sottogruppo C_p o sottogruppo delle permutazione è un gruppo formato dalle mosse del cubo di Rubik che consentono di cambiare la posizione dei cubetti lasciando però invariato il loro orientamento. Ad esempio la mossa U^2 fa parte di questo sottogruppo.



Metodo di risoluzione del cubo di Rubik

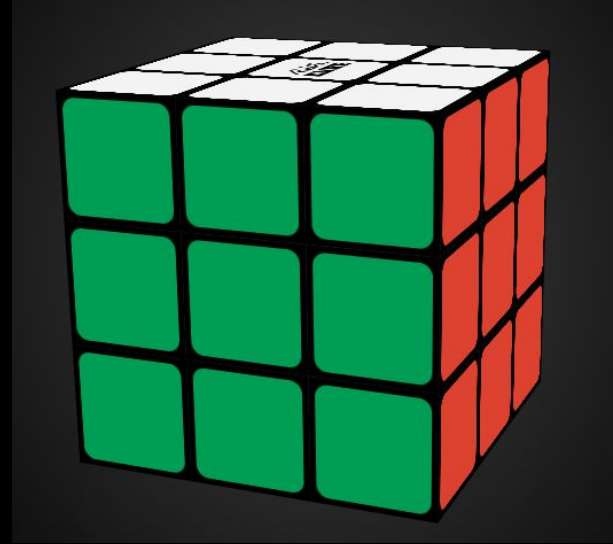
Il metodo di risoluzione è basato sul sottogruppo C_p ed è diviso in due parti:

1. Nella prima bisogna orientare e posizionare correttamente tutti gli spigoli.
2. Nella seconda bisogna orientare e posizionare correttamente gli angoli.

I due algoritmi utilizzati fanno entrambi parte del sottogruppo C_p e, in aggiunta di qualche mossa preparatoria, sono gli unici algoritmi da utilizzare per risolvere il cubo.

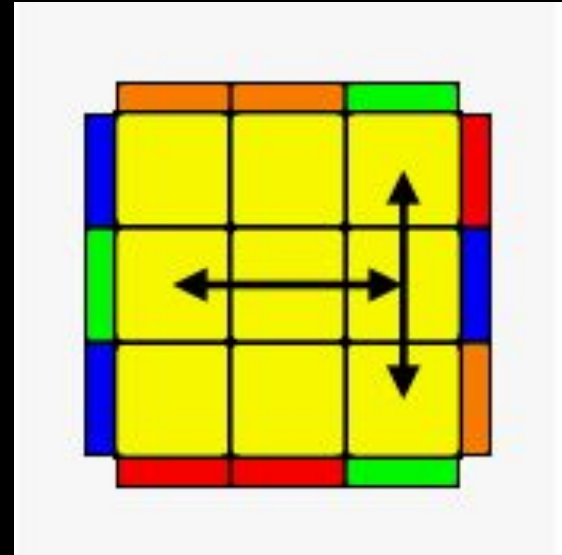
Premesse iniziali

Per orientare correttamente tutti gli spigoli e tutti gli angoli bisogna impostare una posizione di partenza in cui la faccia frontale corrisponde alla verde e quella superiore corrisponde a quella bianca. Poi bisogna impostare uno spigolo come “perno” (P) che per convenzione è lo spigolo nella posizione tra la faccia rossa e quella bianca. Allo stesso modo l’angolo di riferimento sarà quello nella posizione tra la faccia bianca, blu e arancione.



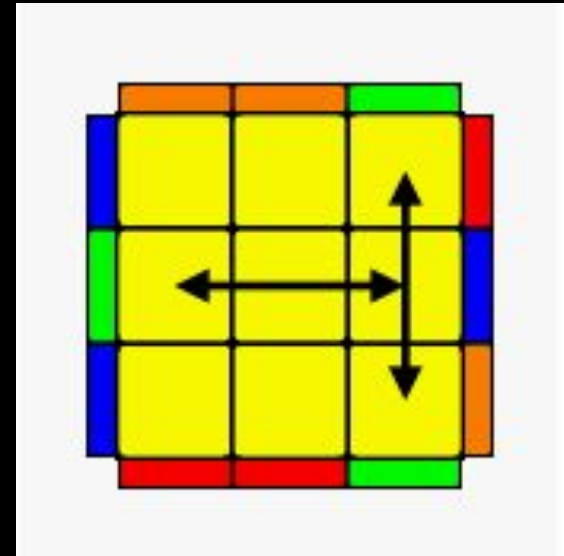
Prima parte

Nella prima parte di risoluzione bisogna prendere in considerazione solo gli spigoli. L'algoritmo da utilizzare è $R U R' U' R' F R^2 U' R' U' R U R' F'$ (in notazione Sigmaster). Questo algoritmo inverte la posizione di due spigoli ma lasciando invariata l'orientamento di essi. Inoltre scambia la posizione anche di due angoli ma per la prima parte di risoluzione ciò non è importante.



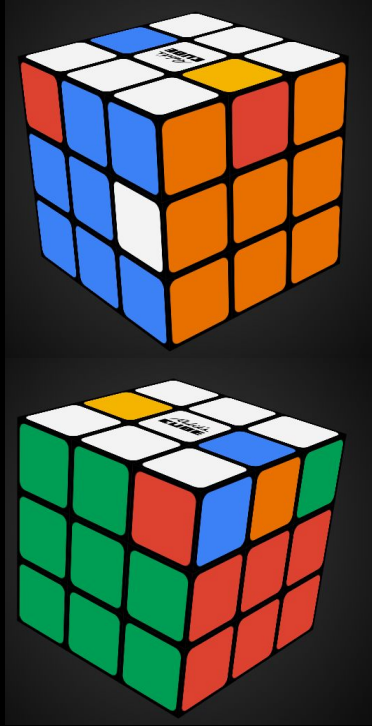
Prima parte

Per scambiare due spigoli è necessario averli uno davanti all'altro. Dopo aver visto quale spigolo si trova nella posizione P è necessario portare di fronte a questo lo spigolo che si trova nella corretta posizione di P eseguendo le mosse preparatorie arbitrarie. Dopo aver eseguito l'algoritmo basterà eseguire le mosse preparatorie al contrario. Bisogna ripetere questo processo fino a quando tutti gli spigoli si trovano nella corretta posizione.

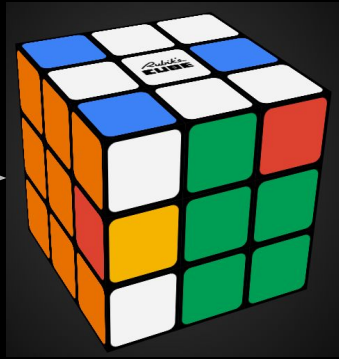


Esempio

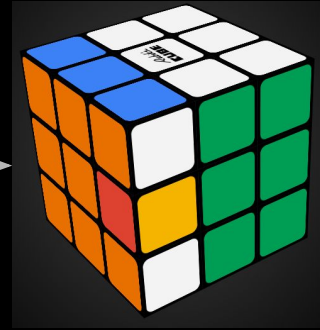
situazione di partenza



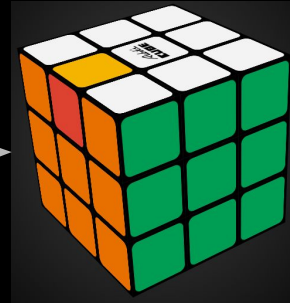
L



algoritmo



L'



Spiegazione dell'esempio

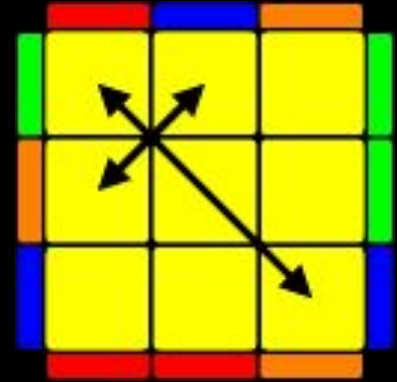
In questo esempio nella posizione "perno" si trova lo spigolo blu/arancione e nella posizione in cui questo spigolo si dovrebbe trovare si trova lo spigolo arancione/bianco.

Per portare lo spigolo arancione/bianco davanti a quello nella posizione perno bisogna fare una mossa L, ovvero una rotazione oraria di 90° della faccia sulla sinistra.

Dopo la mossa preparatoria bisogna svolgere l'algoritmo per poi eseguire la mossa preparatoria al contrario e quindi fare L'.

Seconda parte

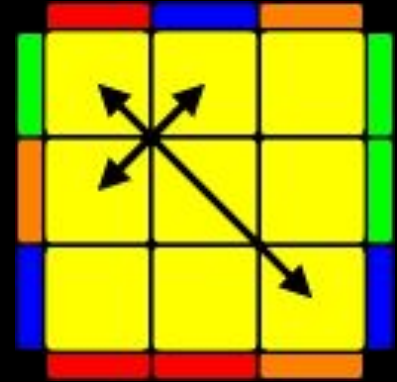
Nella seconda parte di risoluzione bisogna prendere in considerazione solo gli angoli. L'algoritmo da utilizzare è $F R U' R' U' R U R' F' R U R' U' R' F R F'$ (in notazione Sigmaster). Questo algoritmo inverte la posizione di due angoli ma lasciando invariata l'orientamento di essi. Inoltre scambia la posizione anche di due angoli ma ciò è irrilevante poiché il numero di volte che bisognerà fare l'algoritmo è sempre pari.



Seconda parte

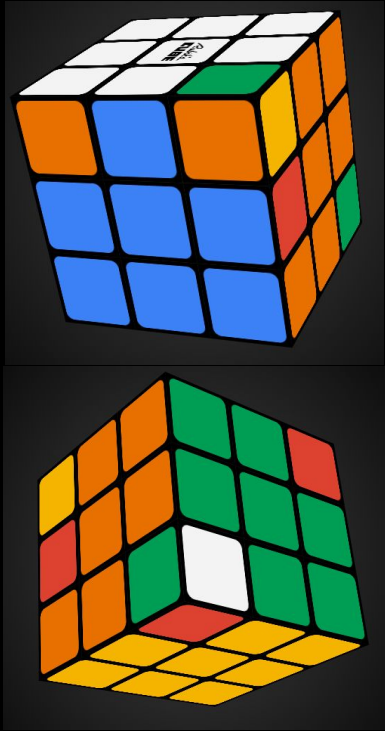
In modo analogo alla prima parte per scambiare due angoli bisognerà posizionarli uno davanti all'altro diagonalmente.

Visto che l'algoritmo oltre a scambiare due angoli scambia anche due spigoli è importante che non si spostino i due spigoli adiacenti all'angolo nella posizione P nella faccia bianca.



situazione di partenza

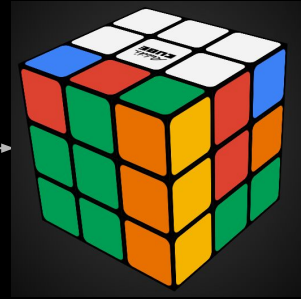
Esempio



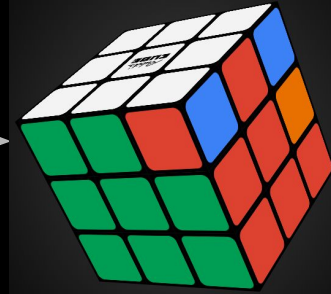
$D F'$



algoritmo



$F D'$



Spiegazione dell'esempio

In questo esempio nella posizione "perno" si trova l'angolo verde/arancione/giallo e nella posizione in cui questo angolo si dovrebbe trovare si trova l'angolo verde/bianco/rossa.

Per portare l'angolo verde/arancione/giallo davanti a quello nella posizione perno bisogna fare $D F'$, ovvero una rotazione oraria di 90° della faccia sottostante seguita da una rotazione antioraria di 90° della faccia frontale.

Dopo le mosse preparatorie bisogna svolgere l'algoritmo per poi eseguire le mosse preparatorie al contrario e quindi fare $F D'$.