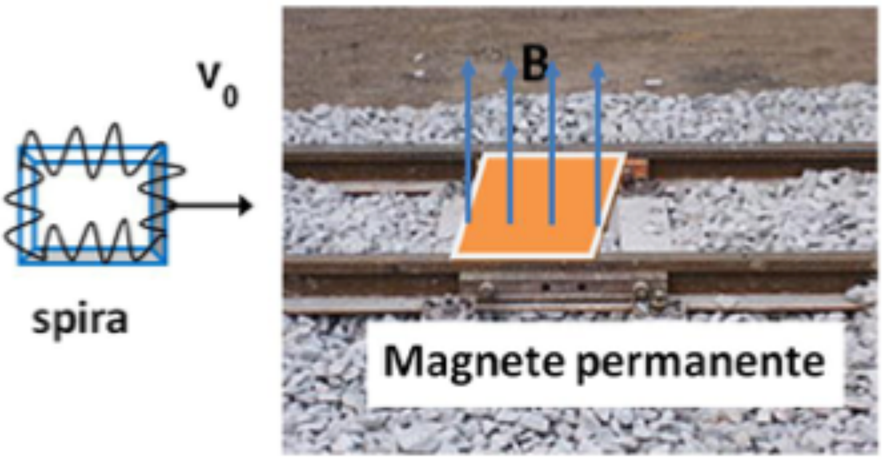
SOLUZIONE

Problema 1.
Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato $L = 5{,}0\ cm$ fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica $R = 0{,}020\ \Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



i. Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra.

Risposta.
Nella spira, man mano che essa entra nella regione dov'è presente il campo magnetico, varia il flusso del campo magnetico attraverso di essa, quindi, come garantito dalla Legge di Faraday, si genera una *fem* indotta che fa rallentare la spira e il vagone ad essa collegato. Quindi l'origine dell'azione frenante è di natura elettromagnetica.
Sulla spira, essendo essa chiusa, circolerà una corrente elettrica il cui verso deve ubbidire alla Legge di Fraday-Lenz. La spira-vagone rallenterà perché i lati della spira perpendicolari ai binari subiranno una forza descritta dalla Legge di Laplace (forza agente su un filo percorso da un'intensità di corrente elettrica immerso in un campo magnetico).

ii. Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $B = 0{,}85\ T$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{B^2L^2}{R}v$$

dove m = 50 g è la massa del vagone.

Risposta.
In un certo istante di tempo t la superficie della spira immersa nel campo magnetico ha area $L\cdot s(t)$, dove $s(t)$ indica la posizione che occupa il lato più avanzato della spira all'istante t.

Poiché $fem(t)=-\frac{d\phi_B(t)}{dt}\rightarrow fem(t)=-\frac{d(B\cdot Ls(t))}{dt}\rightarrow fem(t)=-B\cdot L\frac{ds(t)}{dt}\rightarrow fem(t)=-BLv(t)$, la spira sarà attraversata da un'intensità di corrente $i(t)=-\frac{BLv(t)}{R}$, coerentemente con la prima Legge di Ohm.
La forza di natura elettromagnetica indotta sulla spira è descritta dalla Legge di Laplace, $\vec{F}(t)=i(t)\cdot\vec{L}\times\vec{B}$, da cui $F(t)=-\frac{B^2L^2}{R}v(t)$. Per il secondo Principio della dinamica ottengo $ma(t)=-\frac{B^2L^2}{R}v(t)\rightarrow m\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{B^2L^2}{R}v(t)$, dove $a(t)$ indica l'accelerazione della spira nell'istante di tempo t.

iii. Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v=v_0e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

Risposta.
Si tratta di risolvere un'equazione differenziale a variabili separabili $mv'=-\frac{B^2L^2}{R}v\overset{v\neq 0}{\rightarrow}\frac{v'}{v}=-\frac{B^2L^2}{mR}\rightarrow \ln|v|=-\frac{B^2L^2}{mR}t+c$, $c\in\mathbb{R}$ $\rightarrow v=\left(\pm e^c\right)e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\rightarrow v=k\cdot e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Poiché $v=0$ è soluzione particolare, la soluzione generale dell'equazione differenziale è $v=k\cdot e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$ con $k\in\mathbb{R}$.
Poiché $v(0)=v_0$, ottengo $k=v_0$ per cui il problema di Cauchy

$$\begin{cases} mv'=-\frac{B^2L^2}{R}v \\ v(0)=v_0 \end{cases}$$

ammette come soluzione $v=v_0\cdot e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$. Posto $\frac{mR}{B^2L^2}=\tau$, la soluzione posso scriverla come richiesto, ovvero $v=v_0\cdot e^{-t/\tau}$, con $\tau=\frac{mR}{B^2L^2}=\frac{5,0\cdot 10^{-2}\cdot 2,0\cdot 10^{-2}}{0,85^2\cdot\left(5,0\cdot 10^{-2}\right)^2}=\frac{160}{289}=0,55\ s$.

iv. Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0{,}20\ m/s$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

Risposta.
Il punto del problema richiede di risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} s' = v_0 \cdot e^{-t/\tau} \\ s(0) = 0 \end{cases}.$$

$s' = v_0 \cdot e^{-t/\tau} \to s = -v_0 \tau \cdot e^{-t/\tau} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Poiché $s(0) = 0$, $c = v_0 \tau$, e la funzione che risolve il problema di Cauchy è $s(t) = v_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \to s(t) = \dfrac{32}{289}\left(1 - e^{-289t/160}\right)$.

Poiché:

· $s(t)$ indica la posizione del lato della spira perpendicolare ai binari più avanzato;

· $s(0)$ indica che il lato suddetto coincida con il lato meno avanzato del magnete;

la spira attraverserà completamente il magnete quando $s(\bar{t}) = 2L$, per un certo istante di tempo $\bar{t}$. Quindi $2L = \dfrac{32}{289}\left(1 - e^{-289\bar{t}/160}\right) \to e^{-289\bar{t}/160} = \dfrac{31}{320} \to \bar{t} = \dfrac{160}{289} \cdot \ln\left(\dfrac{320}{31}\right) \to \bar{t} = 1{,}3\ s$.

La velocità di uscita del vagone è $v(\bar{t}) = v_0 \cdot e^{-\bar{t}/\tau} \to v(1{,}3) = \dfrac{31}{1600} \to v(1{,}3) = 0{,}019\ m/s$.

v. Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

Risposta.
La funzione $v = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$ con $v_0 \neq 0$ tende asintoticamente a 0 per $t \to +\infty$ e non ammette zeri, quindi matematicamente $v(t) \neq 0\ \ \forall t \in [0;\ +\infty[$. Poiché è dato che $v_0 = 0{,}20\ m/s$, ovvero la velocità è stimata fino alla seconda cifra decimale, è ragionevole considerare il vagone fermo quando $v(t) \leq 0{,}005\ m/s$ in uno spazio $s(t) \leq 2L$. La velocità limite si ottiene per $v(t) = 0{,}005\ m/s$:

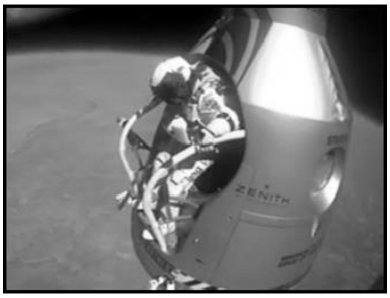
$$\begin{cases} v_0 \cdot e^{-t/\tau} = 0{,}005 \\ v_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \leq 0{,}1 \end{cases} \to \begin{cases} e^{-t/\tau} = 0{,}005/v_0 \\ v_0 \tau \left(1 - 0{,}005/v_0\right) \leq 0{,}1 \end{cases} \to \begin{cases} e^{-t/\tau} = 0{,}005/v_0 \\ v_0 \leq 0{,}1/\tau + 0{,}005 \end{cases} \to v_0 \leq \frac{297}{1600} \to v_{\lim} = 0{,}18\ m/s.$$

Problema 2.
Il 14 ottobre 2012 Felix Baumgartner ha realizzato un lancio storico ottenendo tre record mondiali:

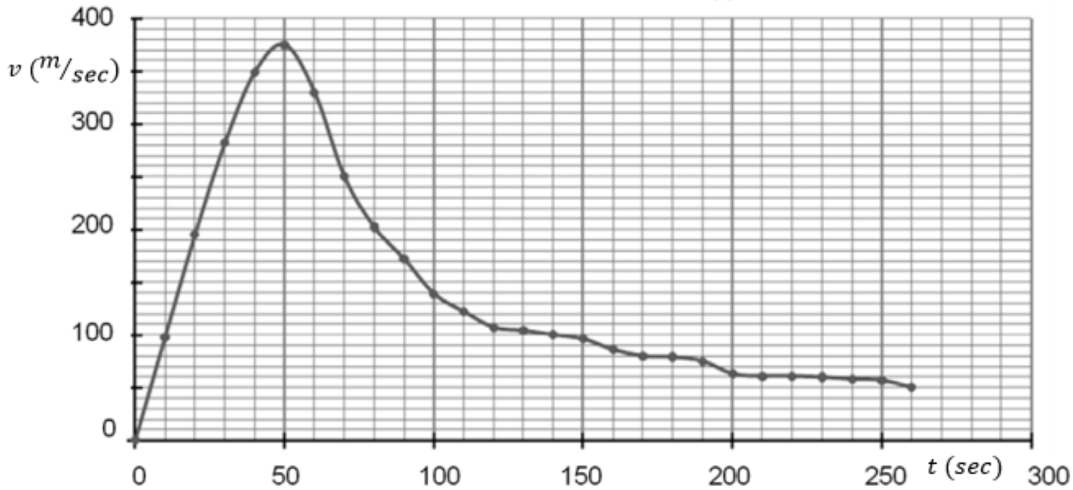
· la maggiore altezza raggiunta da un uomo in una ascesa con un pallone (39˙045 m);

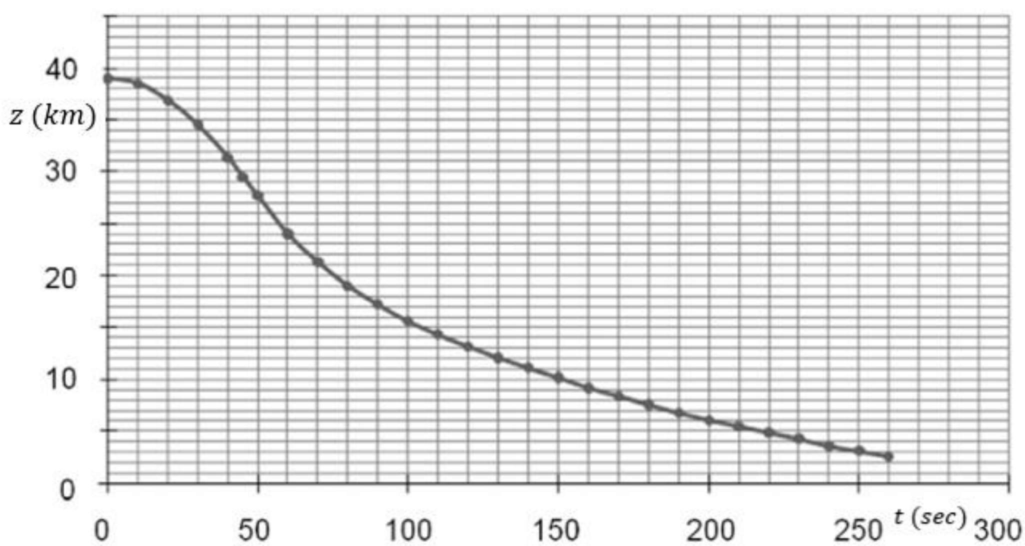
· il lancio più alto in caduta libera;

· la più alta velocità in caduta libera (1˙341,9 km/h).



Dopo l'ascesa in un pallone gonfiato a elio, si è lanciato verso la Terra, protetto da una tuta speciale, e ha aperto il suo paracadute dopo 4 minuti e 20 secondi di caduta libera. Il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi. Nelle figure seguenti sono riportati gli andamenti della velocità e della quota di Baumgartner durante il lancio, a partire dall'istante del lancio $t = 0$.





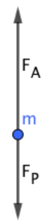
Per realizzare l'ascesa è stato necessario utilizzare un enorme pallone deformabile: ciò per fare in modo che all'aumentare della quota e al diminuire della densità dell'aria il volume del pallone possa aumentare, mantenendo così costante la spinta verso l'alto (spinta di Archimede). Su un giornale veniva riportato *"Per assicurare una velocità d'ascesa sufficiente la spinta verso l'alto era circa doppia di quella necessaria per tenere in equilibrio il sistema. In pratica, aggiungendo alla massa di Baumgartner quella del pallone riempito ad elio, era necessario sollevare una massa di circa 3 tonnellate"*. La massa di Baumgartner e della sua tuta è pari a circa $120\ kg$.

Fase di ascesa

i. Disegna il diagramma delle forze subito dopo il decollo, trascurando la forza di attrito. Non è necessario che il disegno sia in scala, deve però essere coerente con la situazione fisica.

Risposta.

L'utilizzo del pallone deformabile suggerisce che la spinta di Archimede $\vec{F}_A$ sia costante; inoltre anche la forza peso pallone-Baumgartner con tuta $\vec{F}_P$ è costante; necessariamente $F_P \leq F_A$, altrimenti il tutto non si eleverebbe. Trascurando l'attrito con l'aria non ci sono altre forze in gioco in questa fase e lo schema delle forze risulta essere come a lato.

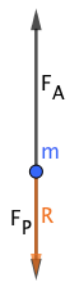


ii. Dopo qualche minuto di ascensione il moto può essere considerato rettilineo uniforme. In questa situazione, calcola approssimativamente il valore della forza di attrito con l'aria.

Risposta.

La massa totale è $m = 3{,}0 \cdot 10^3\ kg$, quindi $F_P = m\overline{g} = 3{,}00 \cdot 10^3 \cdot 9{,}80 = 2{,}29 \cdot 10^4\ N$, dove $\overline{g}$ indica il valore medio dell'accelerazione di gravità.

Per l'equilibrio si dovrebbe avere $F_A = F_P + R$, dove $\vec{R}$ indica la forza di attrito dell'aria. Il testo dice che *"la spinta verso l'alto era circa doppia di quella necessaria per tenere in equilibrio il sistema* (trascurando l'attrito, ndr)", quindi $F_A = 2F_P = 5{,}88 \cdot 10^4\ N$, per cui $\vec{R} = \vec{F}_P$.



Fase di lancio

Scegli un sistema di riferimento e studia la caduta verticale del sistema S costituito da Baumgartner e dalla tuta. In questa fase, si può ritenere trascurabile l'effetto della spinta di Archimede.

iii. Utilizzando i grafici, determina l'accelerazione di S per $t < 20\ s$ e commenta il risultato ottenuto.

Risposta.

Scelgo come sistema di riferimento una retta orientata verso il centro della terra con lo zero posto nel punto nel quale il grave inizia il lancio. Inizialmente, nei primi trenta secondi, ho un MRUA (il diagramma *v-t* è approssimabile a una retta); alla fine, da 120 *s*, il moto è approssimativamente RU (il diagramma *s-t* è approssimabile a una retta). Tra i due intervalli il moto è accelerato (non in modo uniforme) fino a raggiungere (o avvicinandosi) alla velocità limite (all'istante $t = 50\ s$), subito dopo Baumgartner presumibilmente si dispone in modo tale da far aumentare la superficie esposta alla direzione dell'aria e compie un moto decelerato (non uniforme).

L'accelerazione media nei primi venti secondi vale $\overline{a} = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\frac{200-0}{20-0}\right| = 10\, m/s^2$.

Il valore dell'accelerazione media nei primi venti secondi significa che in ogni secondo la velocità incrementa di 36 km/h, ovvero, partendo da fermo, dopo appena 20 secondi la velocità del grave sarà di 720 km/h!

Da notare che praticamente coincide con il valore di $\overline{g}$, significa che l'attrito con l'aria, in questa prima fase, è trascurabile.

iv. Il sistema S ha raggiunto velocità supersoniche durante la caduta? Tieni presente la seguente tabella, che riporta la velocità del suono in aria ad altezze diverse:

altezza (km)	10	20	30	40
velocità del suono (m/s)	305	297	301	318

Risposta.

Analizzando i grafici dati si ha che

altezza (km)	10	20	30	40
velocità del grave (m/s)	100	220	360	0

Quindi sì, il grave ha superato la velocità del suono, indicativamente dai 40 s ai 60 s dopo il lancio.

v. Calcola la variazione di energia meccanica ΔE_m tra il momento in cui Baumgartner salta e il momento in cui raggiunge la massima velocità; fornisci la tua interpretazione del risultato.

Risposta.

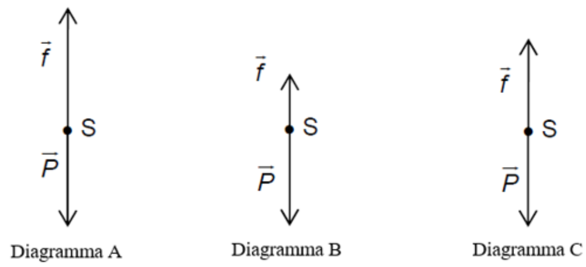
Sia m_B la massa del grave (Baumgartner più tuta). Stimo l'altezza da terra all'istante in cui raggiunge la massima velocità come 28'000 metri.

$E_i = m_B \overline{g} h_i = 120 \cdot 9{,}80 \cdot 39'045 = 4{,}59 \cdot 10^7\ J$;

$E_f = m_B \overline{g} h_f + \frac{1}{2} m_B v_{MAX}^2 = 120 \cdot 9{,}80 \cdot 28'000 + \frac{1}{2} 120 \cdot 372{,}75^2 = 4{,}13 \cdot 10^7\ J$.

Quindi $\Delta E_m = E_f - E_i = -4{,}65 \cdot 10^6\ J$. Tale differenza di energia è stata dissipata sotto forma di calore generato dall'attrito dell'aria con il grave.

vi. Nella figura seguente vengono riportati i diagrammi delle forze applicate al sistema S durante la fase di lancio. $\vec{P}$ rappresenta la forza peso e $\vec{f}$ la forza di attrito con l'aria. Poni in corrispondenza i diagrammi con i tre istanti $t_1 = 40\ s$, $t_2 = 50\ s$, $t_3 = 60\ s$.



Risposta.
L'attrito viscoso dell'aria è direttamente proporzionale alla velocità del grave, quindi a parità della forma del grave, maggiore è la velocità maggiore sarà *f*; all'istante t_2 Baumgartner si dispone in modo da aumentare la superficie esposta all'aria e la velocità comincia a diminuire perciò *f* sarà maggiore perché la forma del grave è tale da aumentare l'attrito con l'aria. Dunque:
· il diagramma A è associato all'istante in cui Baumgartner ha un'elevata velocità e paracadute aperto, ovvero a t_3;
· il diagramma B è associato all'istante in cui Baumgartner non ha un'elevata velocità e paracadute chiuso, ovvero a t_1;
· il diagramma C è associato all'istante in cui Baumgartner ha un'elevata velocità e paracadute chiuso, ovvero a t_2.

vii. Determina a quale altitudine Baumgartner ha aperto il paracadute. Ricordando che il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi, calcola la velocità media di discesa dopo l'apertura del paracadute, fino all'arrivo al suolo. Ti appare ragionevole considerare il moto in quest'ultima fase come un moto rettilineo uniforme?

Risposta.
Poiché il moto di caduta libera è durato 260 s (parte relativa ai grafici dati), l'apertura del paracadute è avvenuta nell'istante $t = 260\ s$ in cui Baumgartner raggiunge la velocità di $50\ m/s = 180\ km/h$, a un'altezza da terra di circa 2˙000 m.

$$\overline{v} = \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{0-2000}{543-260}\right| = 7{,}07\ m/s = 25{,}4\ km/h.$$

Non è ragionevole considerare la velocità costante in quest'ultima fase, visto che varia dai $50\ m/s$ a 0. È senz'altro più ragionevole pensare il moto finale come rettilineo uniformemente decelerato con accelerazione media $\overline{a}' = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\frac{0-50}{543-260}\right| = 1{,}77 \cdot 10^{-1}\ m/s^2$.

Se tengo conto che nella fase di discesa con paracadute, dopo un certo intervallo di tempo il grave raggiunge la velocità limite, da quell'istante in poi ha senso considerare il moto rettilineo uniforme. In tal caso lo schema delle forze dà

$$-m_B a = -R + F_P \rightarrow -m_B v' = -kv + m_B \overline{g} \rightarrow v' - \frac{k}{m_B} v = -\overline{g} \rightarrow v = -\frac{m_B}{k}\left(k' - \overline{g} e^{-\frac{k}{m_B}t}\right) \text{ con } k' \in \mathbb{R},$$

dove $R = kv$ è il modulo dell'attrito viscoso dell'aria ($k\ [kg/s]$ è una costante che dipende dalle caratteristiche del fluido e del grave). Considerando la condizione al contorno $v(0) = 50\ m/s$, ottengo che $k' = \frac{k \cdot v(0)}{m_B} + \overline{g}$, da cui $v(t) = v(0) - \tau \overline{g}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, dove $\tau = m_B/k$.

La velocità limite si raggiunge dopo un tempo stimato in 4τ ed è pari a $v(0)+\tau\overline{g}$. Quindi da $(260+4\tau)\ s$ a 543 s è ragionevole considerare il moto rettilineo uniforme.

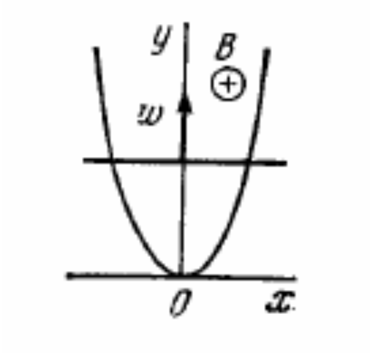
viii. Per valutare il rischio di traumi derivanti dall'impatto dell'arrivo al suolo, fornisci una stima dell'altezza da cui Baumgartner sarebbe dovuto saltare, senza paracadute, per giungere al suolo con la stessa velocità.

Risposta.
Trascurando la spinta di Archimede e l'attrito con l'aria, posso considerare il sistema chiuso e isolato per cui posso applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Ottengo che $\cancel{m_B}\overline{g}h=\frac{1}{2}\cancel{m_B}\left(v(0)-\tau\overline{g}\right)^2 \rightarrow h=\frac{\left(v(0)-\tau\overline{g}\right)^2}{2\overline{g}}$.

Stimando $\tau=5\ s$, trovo $k=24\ kg/s$ e quindi il paracadutista arriva a terra con una velocità di 1 m/s. Perciò $h=5{,}10\ cm$.

Questionario

1. Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ perpendicolare al piano Oxy della parabola. All'istante $t = 0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della y.



Risposta.

Poiché $y(t) = ax^2(t)$, per $a > 0$ ottengo $|x(t)| = \sqrt{y(t)/a}$.

In un certo istante t la barretta crea con la parabola una spira la cui area è data dal Teorema di Archimede: $S = \frac{2}{3}y(t) \cdot 2|x(t)| \to S = \frac{2}{3}y(t) \cdot 2\sqrt{y(t)/a} \to S(y(t)) = \frac{4}{3\sqrt{a}}y^{3/2}(t)$.

Quindi, per la Legge di Faraday-Neumann-Lenz, $fem(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} \to fem(t) =$ $= -B\frac{dS(y(t))}{dt} \to fem(y(t)) = -B\frac{4}{3\sqrt{a}}\frac{3}{2}y^{1/2}(t) \cdot y'(t) \to fem(y) = -\frac{2B}{\sqrt{a}}\sqrt{y} \cdot y'$.

Esempio di calcolo.

Sia, in un certo istante t, $y(t) = a$. Poiché lungo l'asse y la barra si muove con accelerazione costante $\omega > 0$, $y(t) = v_0 t + \omega/2t^2$ (v_0 indica la velocità iniziale lungo l'asse y); calcolando l'istante di tempo per cui $y(t) = a$ ottengo $\frac{\omega}{2}t^2 + v_0 t - a = 0 \to t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0{}^2 + 2a\omega}}{\omega}$.

Inoltre $v_y(t) = v_0 + \omega t \to y' = v_0 + \omega t$; calcolandola nell'istante di tempo trovato ottengo $y' = \sqrt{v_0{}^2 + 2a\omega}$.

La *fem* indotta, in quell'istante, vale $fem(a) = -\frac{2B}{\cancel{\sqrt{a}}}\cancel{\sqrt{a}}\sqrt{v_0^2 + 2a\omega} \to$ $\to fem(a) = -2B\sqrt{v_0^2 + 2a\omega}$.

2. La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione

$$x(t) = \alpha t(1 - \beta t),$$

dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$. Determina:

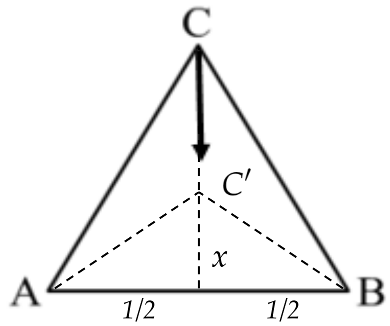
i. la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;
ii. l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

Risposta.

i. $v(t)=x'(t)=\alpha-2\beta t$ e $a(t)=x''(t)=-2\beta$.

ii. $x(t)=0 \rightarrow \alpha t(1-\beta t)=0 \rightarrow t=0 \vee t=1/\beta$; l'intervallo di tempo che impiega a ritornare all'origine è $\Delta t=1/\beta$. In un diagramma *x-t* la legge oraria che descrive il moto della particella è rappresentata da una parabola per cui lo spazio percorso nell'intervallo di tempo trovato sarà paria a $2x_V$, dove x_V rappresenta l'ordinata del vertice, pari a $\frac{\alpha^2(2-\alpha)}{4\beta}$. Quindi $\Delta x(1/\beta)=\frac{\alpha^2(2-\alpha)}{2\beta}$.

3. Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici del triangolo equilatero *ABC*, i cui lati misurano 1 *m*.
   i. Determina l'energia potenziale del sistema.
   ii. La carica collocata in *C* viene spostata verso il segmento *AB* lungo la perpendicolare ad *AB*; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento *AB*.



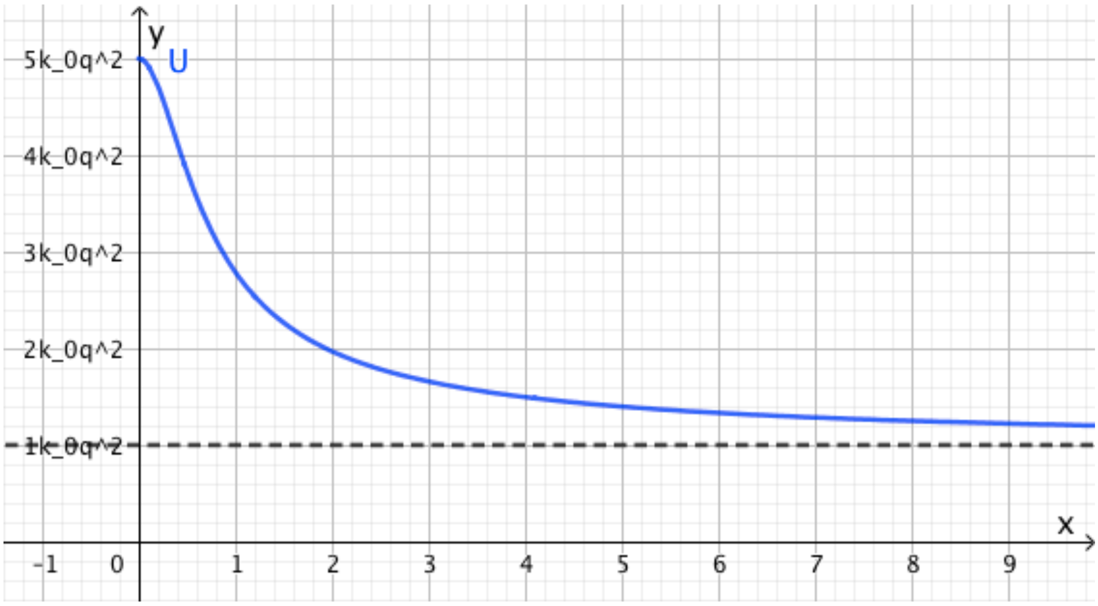
Risposta.

i. $U=k_0\frac{q_Aq_B}{AB}+k_0\frac{q_Aq_C}{AC}+k_0\frac{q_Bq_C}{BC} \rightarrow U=3k_0q^2$.

ii. Sia $x=\text{dist}(C;AB)$. Per il Teorema di Pitagora ottengo $\overline{AC'}=\sqrt{4x^2+1}/2=\overline{BC'}$, da cui $U=k_0\frac{q_Aq_B}{AB}+k_0\frac{q_Aq_C}{AC'}+k_0\frac{q_Cq_B}{C'B} \rightarrow U(x)=k_0q^2\left(1+\frac{4}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$.

Studio $f(x)=1+\frac{4}{\sqrt{4x^2+1}}$ con $x\in[0;\ +\infty[$: osservo che f è sempre positiva e che $f(x)\rightarrow 1$ per $x\rightarrow+\infty$. Poiché $f'(x)=-\frac{16x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}<0$, f risulta essere sempre decrescente e ammette un massimo assoluto $(0;\ 5)$.

Il grafico qualitativo di $U(x)$ è dunque il seguente:



4. Un punto materiale si muove nel piano Oxy secondo la legge oraria
$$x = a\sin(\omega t)$$
$$y = a(1-\cos(\omega t))'$$
con a e ω costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t=\tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.

Risposta.
La distanza del punto dall'origine al tempo $t=\tau$ è $\overline{OP} = \sqrt{a^2\sin^2(\omega\tau)+a^2(1-\cos(\omega\tau))^2} \to$
$\to \overline{OP} = a\sqrt{2(1-\cos(\omega\tau))} \to \overline{OP} = \sqrt{2ay}$.
$\begin{matrix} v_x = x' = a\omega\cos(\omega t) \\ v_y = y' = a\omega\sin(\omega t) \end{matrix}$ e $\begin{matrix} a_x = x'' = -a\omega^2\sin(\omega t) \\ a_y = y'' = a\omega^2\cos(\omega t) \end{matrix}$; calcolate in $t=0$ ottengo $\begin{matrix} v_x = a\omega \\ v_y = 0 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = a\omega^2 \end{matrix}$',
per cui il vettore velocità ha direzione coincidente con l'asse x mentre il vettore accelerazione ha direzione coincidente con l'asse y.

5. Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10\ kV/cm$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.

Risposta.
Conoscendo la massa dell'elettrone a riposo m_e trovo la sua energia a riposo $E_0 = m_e c^2$, dove c indica la velocità della luce nel vuoto. Poiché l'elettrone è immerso in un campo elettrico subirà un'accelerazione pari a $eE/(\gamma m_e)$, dove e indica il modulo della carica dell'elettrone e $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-(v/c)^2}$ è il fattore lorentziano.
Dunque, risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \gamma v' = \dfrac{eE}{m_e} \\ v(0)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{v'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \dfrac{eE}{m_e} \\ v(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{r\in\mathbb{R}} \begin{cases} c\cdot\arcsin(v(t)) = \dfrac{eE}{m_e}t + r \\ v(0)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v(t) = \sin\left(\dfrac{eE}{m_e c}t + \dfrac{r}{c}\right) \\ v(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\rightarrow v(t) = \sin\left(\frac{eE}{m_e c}t + \pi k\right),$$

riesco a determinare l'espressione analitica della velocità in funzione del tempo $v(t)$ (relazione 1).

$$K = \frac{1}{2}\gamma m_e v^2 \rightarrow \frac{v^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{2K}{m_e} \rightarrow m_e^2 c^2 v^4 - 4K^2 v^2 - 4K^2 c^2 = 0 \rightarrow v = \frac{\sqrt{2}K}{m_e c}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(m_e c^2/K\right)^2}} \quad ,$$

dove K indica l'energia cinetica (relazione 2).
Poiché si vuole $K = m_e c^2$, ricavo, confrontando le due espressioni della velocità (relazione 1 e relazione 2), il tempo richiesto: $t = \dfrac{m_e c}{eE}\left(\arcsin\left(\sqrt{2c\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)}\right) - \pi k\right)$.

<u>Osservazione</u>: Il quesito richiede solo di descrivere il procedimento, non è assolutamente necessario lo svolgimento dei calcoli come mostrato.

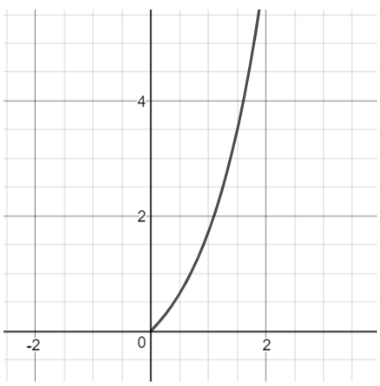
6. Quanto tempo impiegherà un'onda sonora a percorrere la distanza l tra i punti A e B se la temperatura dell'aria tra di essi varia linearmente da T_1 a T_2? Tieni presente che la velocità di propagazione nell'aria varia in funzione della temperatura secondo la legge $v = a\sqrt{T}$, dove a è una costante.

Risposta.

$$v(t(T)) = \frac{ds}{dt(T)} \quad\rightarrow\quad dt(T) = \frac{1}{v(t(T))}ds \quad\overset{a\neq 0}{\rightarrow}\quad dt(T) = \frac{\ell}{a\sqrt{T}}dT \quad\rightarrow\quad \int_{t_1}^{t_2} dt(T) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\ell}{a\sqrt{T}}dT \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow t_2 - t_1 = \frac{2\ell}{a}\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right) \rightarrow \Delta t = \frac{2\ell}{a}\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right).$$

7. Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta.



Risposta.
Siano Q la carica puntiforme fissa e q quella che si allontana da Q. La forza generata da Q su q è data dalla Legge di Coulomb:

$$F = k_0 \frac{Qq}{r^2},$$

dove r indica la distanza tra le due cariche. Per il secondo principio della dinamica ottengo $m_q v' = k_0 \frac{Qq}{r^2} \to v' = k_0 \frac{Qq}{m_q r^2} \to v = c - k_0 \frac{Qq}{m_q r}$, dove m_q indica la massa della carica q e c è una costante reale. Noto che la velocità nel grafico *v-t* è crescente, mentre dal risultato analitico ho ottenuto che deve diminuire all'aumentare di r (e quindi di t). Dunque il grafico dato non può rappresentare la situazione descritta.

8. Un punto si muove lungo l'asse x secondo la legge $x(t) = a\sin^2(3t - \pi/4)$ con a costante positiva. Determina:
   i. l'ampiezza e il periodo di oscillazione;
   ii. l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

Risposta.

i. Poiché $x_{\min} = 0$ e $x_{MAX} = a$, l'ampiezza vale $a/2$. Sia $k \in \mathbb{Z}$; ottengo che

$$x\left(t + \frac{\pi}{3}k\right) = a\sin^2\left(3\left(t + \frac{\pi}{3}k\right) - \frac{\pi}{4}\right) = a\sin^2\left(3t - \frac{\pi}{4} + \pi k\right) = \begin{cases} a\left(-\sin(3t - \pi/4)\right)^2 & \text{per } k \text{ dispari} \\ a\left(\sin(3t - \pi/4)\right)^2 & \text{per } k \text{ pari} \end{cases},$$

ovvero, in entrambi i casi, $x(t + \pi k/3) = x(t)$; concludo che il periodo di oscillazione è $\pi/3$.

ii. $x(0) = a/2$. La massima distanza da tale valore la raggiunge per la prima volta a un quarto di periodo, ovvero per $t = \pi/12$: $x(\pi/12) = 0$.

<u>Osservazione</u>: si poteva rispondere a tutte le domande del quesito anche per via grafica.