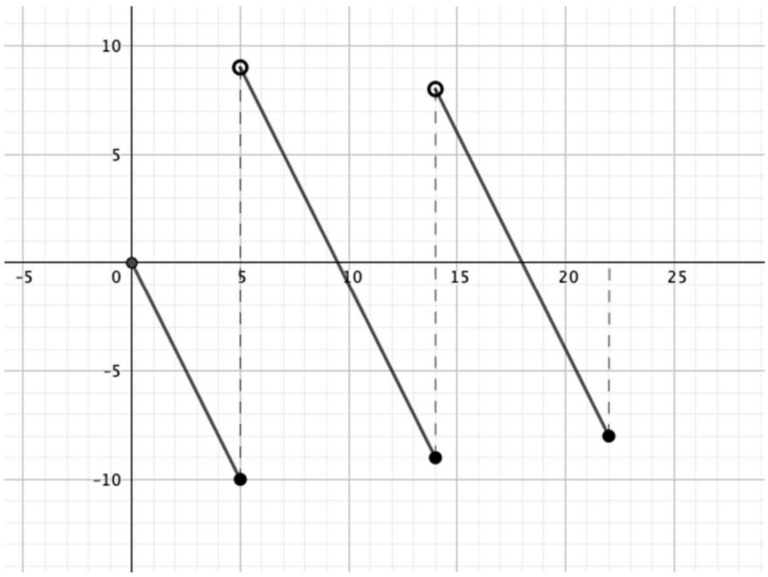
Dancing ball

Considera il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



1. Dopo aver determinato l'equazione della funzione $y = f(x)$, traccia il grafico della sua primitiva, sapendo che è continua e passa per il punto A (5,0).
2. Analizza la derivabilità della funzione $y = F(x)$ nell'intervallo [0, 22], determinando in particolare le ampiezze dell'angolo formato dalle rette tangenti negli eventuali punti angolosi.

Hai deciso di analizzare sperimentalmente il moto di una pallina da tennis lasciata cadere da un metro di altezza.
Per fare ciò hai pensato di misurare la massa della pallina leggendo un valore di 58g e di lasciarla cadere dall'altezza di un metro.
Con l'ausilio di un sensore di posizione misuri la distanza palla-sensore e da questa ricavi la distanza h palla-pavimento al variare del tempo.
La tabella sottostante riporta un set di dati tempo-posizione finché la pallina tocca terra tre volte.

t (s)	h(m)
0,00	1,00
0,24	0,78
0,36	0,41
0,48	0,07
0,60	0,45
0,72	0,70
0,88	0,81
1,04	0,67
1,20	0,29
1,28	0,00
1,36	0,25
1,48	0,51
1,64	0,64
1,80	0,52
1,92	0,27
2,00	0,02

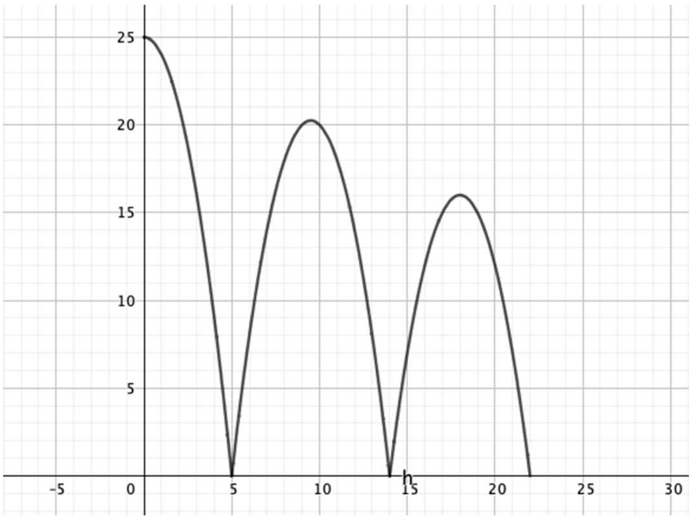
3. Rappresenta graficamente i dati in tabella e dal grafico ottenuto discuti le caratteristiche cinematiche specifiche del moto.
4. Analizza il fenomeno dal punto di vista energetico mettendo in evidenza le trasformazioni dell'energia meccanica che interessano l'intero processo.
   Stima, inoltre, la percentuale di energia dissipata ad ogni rimbalzo, assumendo come valori di altezza massima quelli evinti dalla tabella.
5. Spiega come il modello matematico studiato al punto 1. sia adeguato a descrivere la situazione fisica proposta.
6. Le quote della pallina corrispondenti alle massime altezze raggiunte ad ogni rimbalzo seguono un andamento del tipo $y = Ae^{-bx}$. Stima i valori delle costanti A e b per il caso trattato.

Soluzione

1. Il grafico fornito rappresenta una funzione lineare definita a tratti, di equazione:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 5 \\ -2x + 19, & 5 < x \leq 14 \\ -2x + 36, & 14 < x \leq 22 \end{cases}$$

Si ricava il grafico della funzione primitiva F(x):



La funzione primitiva ha equazione

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + c_1, & 0 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 19x + c_2, & 5 < x \leq 14 \\ -x^2 + 36x + c_3, & 14 < x \leq 22 \end{cases}$$

Per determinare le costanti di integrazione si impone il passaggio per il punto dato A(5, 0), per cui

$$-25 + c_1 = 0$$

da cui $c_1 = 25$.

Per la continuità della funzione deve essere

$$\lim_{x \to 5^-} -x^2 + 25 = \lim_{x \to 5^+} -x^2 + 19x + c_2$$

da cui $c_2 = -70$

e

$$\lim_{x \to 14^-} (-x^2 + 19x - 70) = \lim_{x \to 14^+} (-x^2 + 36x + c_3)$$

da cui si ricava $c_3 = -308$.

L'equazione della primitiva risulta quindi

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 25, & 0 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 19x - 70, & 5 < x \leq 14 \\ -x^2 + 36x - 308, & 14 < x \leq 22 \end{cases}$$

2. La funzione F(x) è derivabile negli intervalli $(0, 5) \cup (5, 14) \cup (14, 22)$. I punti A (5, 0), B (14, 0), sono punti angolosi perché esistono finite le derivate destra e sinistra, ma i valori non coincidono, come dimostrano i seguenti limiti calcolati in $x = 5$ e $x = 14$.

$\lim_{x \to 5^-} (-2x) = -10$ e $\lim_{x \to 5^+} (-2x + 19) = 9$

$\lim_{x\to14^-}(-2x+9) = -9$ e $\lim_{x\to14^+}(-2x+36) = 8$.

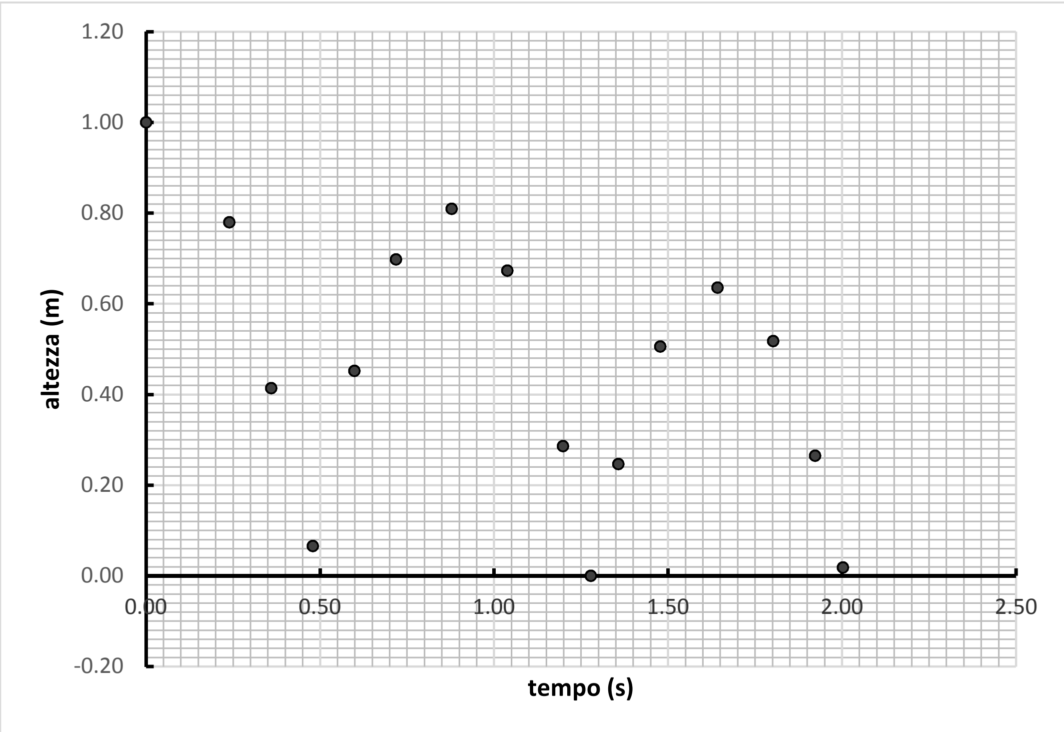
Le derivate destra e sinistra calcolate nei punti considerati forniscono i valori dei coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico nei punti considerati.

Nel punto A di ascissa $x = 5$:
$m_1 = \tan\alpha = F'_- = -10$ da cui $\alpha = \tan^{-1}(-10)$
$m_2 = \tan\beta = F'_+ = 9$ da cui $\beta = \tan^{-1} 9$
L'angolo formato dalle due tangenti risulta essere quindi $\gamma_1 = 180° + \alpha - \beta = 12{,}05°$

Nel punto B di ascissa $x = 14$:
$m_1 = \tan\alpha = F'_- = -9$ da cui $\alpha = \tan^{-1}(-9)$
$m_2 = \tan\beta = F'_+ = 9$ da cui $\beta = \tan^{-1} 8$
Mentre nel punto B risulta $\gamma_2 = 180° + \alpha - \beta = 13{,}46°$.

3.

t (s)	h(m)
0,00	1,00
0,24	0,78
0,36	0,41
0,48	0,07
0,60	0,45
0,72	0,70
0,88	0,81
1,04	0,67
1,20	0,29
1,28	0,00
1,36	0,25
1,48	0,51
1,64	0,64
1,80	0,52
1,92	0,27
2,00	0,02



Dal grafico ottenuto osserviamo la fase di prima caduta, della durata di circa mezzo secondo, in cui la pallina si porta dalla posizione iniziale h_0=1,00 m fino a terra. In questa fase la velocità (pendenza della curva h(t)) passa da zero a un valore massimo negativo indicando che si tratta di un moto accelerato nel verso opposto rispetto al riferimento fissato.
Successivamente la pallina rimbalza, raggiunge un'altezza h_1=0,81m e si riporta a terra presentando un moto simmetrico, prima decelerato verso l'alto, e poi accelerato verso il basso. Questa seconda fase ha una durata di circa otto decimi di secondo e la simmetria indica che il moto avviene con accelerazione costante.
La terza fase, di circa sette decimi di secondo, corrisponde al rimbalzo successivo della pallina, con caratteristiche analoghe alla fase precedente ma con velocità iniziale minore ed altezza massima raggiunta più bassa.

NUCLEI TEMATICI FONDAMENTALI (di riferimento per il problema)

Matematica: INSIEMI E FUNZIONI

- Proprietà delle funzioni
- Calcolo differenziale

Fisica: MISURA E RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE

- Rappresentazioni di grandezze fisiche

SPAZIO, TEMPO E MOTO

- Grandezze cinematiche
- Moto di un punto materiale

ENERGIA E MATERIA

- Conservazione dell'energia
- Trasformazione dell'energia

Obiettivi della prova (che intervengono nel problema)

Matematica

- Studiare rette, coniche e loro intersezioni nel piano nonché rette, piani, superfici sferiche e loro intersezioni nello spazio utilizzando le coordinate cartesiane
- Individuare le caratteristiche fondamentali e i parametri caratteristici delle progressioni aritmetiche e geometriche e delle funzioni polinomiali, lineari a tratti, razionali fratte, circolari, esponenziali e logaritmiche, modulo e loro composizioni semplici.
- Riconoscere le caratteristiche di continuità e derivabilità di una funzione e applicare i principali teoremi riguardanti la continuità e la derivabilità.
- Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato.
- A partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici della sua derivata e di una sua funzione integrale.
- Determinare primitive di funzioni utilizzando integrali immediati, integrazione per sostituzione o per parti.

Fisica

- Rappresentare, anche graficamente, il valore di una grandezza fisica e la sua incertezza nelle unità di misura appropriate. Rappresentare e interpretare, tramite un grafico, la relazione tra due grandezze fisiche.
- Valutare l'accordo tra i valori sperimentali di grandezze fisiche in relazione alle incertezze di misura al fine di descrivere correttamente il fenomeno osservato.
- Determinare e discutere il moto di punti materiali e corpi rigidi sotto l'azione di forze.
- Mettere in relazione la variazione di energia cinetica, di energia potenziale e di energia meccanica con il lavoro fatto dalle forze agenti.
- Utilizzare la conservazione dell'energia nello studio del moto di punti materiali e di corpi rigidi e nelle trasformazioni tra lavoro e calore.