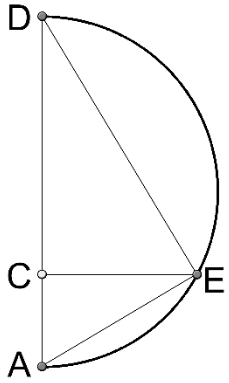
Problema Gruppo 4A

Testo

Punto 1

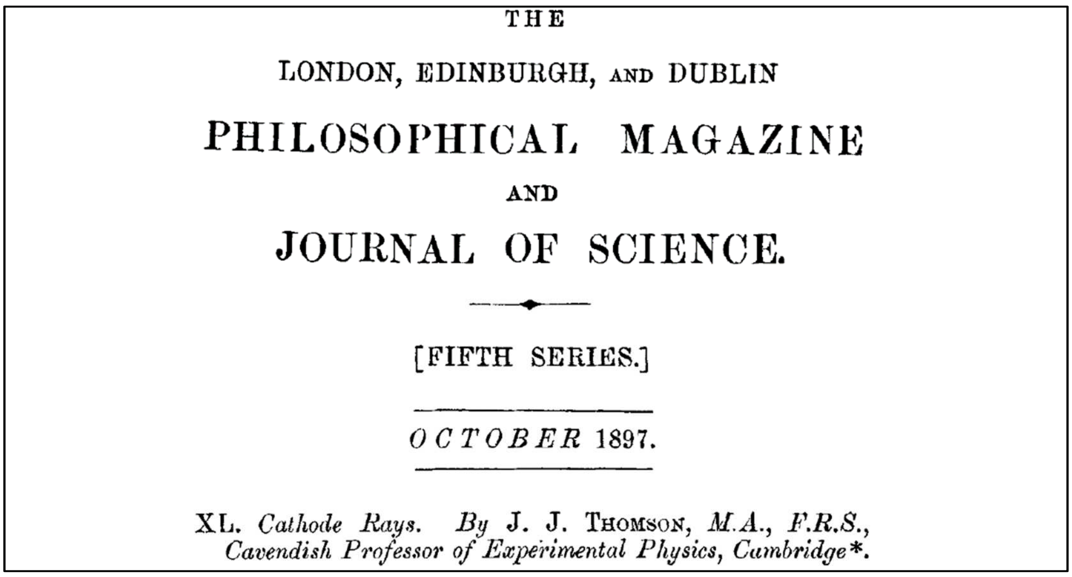
Data una semicirconferenza di diametro DA siano E e C, rispettivamente, un punto sulla semicirconferenza e la sua proiezione sul diametro.

Posto $\overline{CE} = h$ e $\overline{CA} = k$, determinare il raggio della semicirconferenza in funzione di h e k.



Punto 2

Nel 1897 J.J. Thomson ha effettuato, utilizzando un particolare tubo a vuoto (tubo di Crooks), un esperimento che ha consentito di determinare il rapporto tra carica e massa dell'elettrone $\left(\frac{e}{m}\right)$.



THE

LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN

PHILOSOPHICAL MAGAZINE

AND

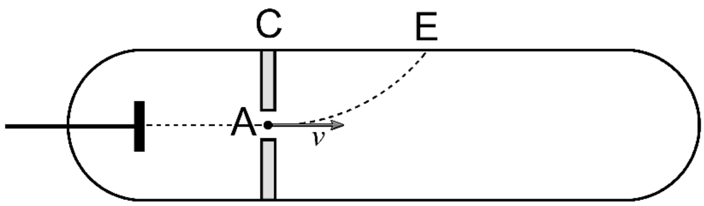
JOURNAL OF SCIENCE.

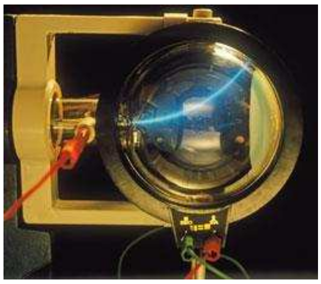
[FIFTH SERIES.]

OCTOBER 1897.

XL. *Cathode Rays. By* J. J. THOMSON, *M.A., F.R.S., Cavendish Professor of Experimental Physics, Cambridge*.*

Nell'esperimento, gli elettroni, preventivamente accelerati da un'opportuna differenza di potenziale, vengono fatti entrare (con velocità v) in una zona ove è presente un campo magnetico uniforme. In questa zona, essi vengono deviati così da descrivere l'arco di circonferenza AE (si veda la figura sottostante).





Fonte:
© Andrew Lambert Photography/SPL

Misurando le distanze CA e CE Thomson ha ricavato il raggio dell'orbita:

$$r = \frac{h^2}{2k} + \frac{k}{2} \text{ (ove } h = \overline{CE} \text{ e } k = \overline{CA}\text{)}$$

Determinare quale direzione e verso deve avere il campo magnetico affinché la traiettoria sia circolare, motivando la ragione per la quale tale traiettoria risulta circolare.

Dimostrare successivamente che $\frac{e}{m} = \frac{v}{B \cdot r}$, indicando con B il modulo del vettore campo magnetico.

In particolare, se $v = 3{,}7 \cdot 10^7 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $B = 2{,}6 \text{ mT}$, $h = 6{,}7 \text{ cm}$ e $k = 3{,}5 \text{ cm}$, ricavare il valore di $\frac{e}{m}$ con le corrette unità di misura e cifre significative.

In una prima fase l'elettrone viene accelerato da una differenza di potenziale ΔV, entrando così con velocità v nella zona ove presente il campo magnetico, ricavare la velocità in funzione di ΔV e del rapporto $\frac{e}{m}$.

Si discuta, inoltre, come varierebbe la traiettoria al variare della direzione del campo magnetico.

Punto 3

Avendo stabilito nella relazione $\frac{e}{m} = \frac{v}{B \cdot r}$ che r e B sono inversamente proporzionali, ovvero che $B \cdot r = \alpha$, dove α è una costante, e ricordando che $r = \frac{h^2}{2k} + \frac{k}{2}$, verificare che l'andamento di h al variare di B è del tipo $h = \sqrt{\frac{2\alpha k - Bk^2}{B}}$.

Punto 4

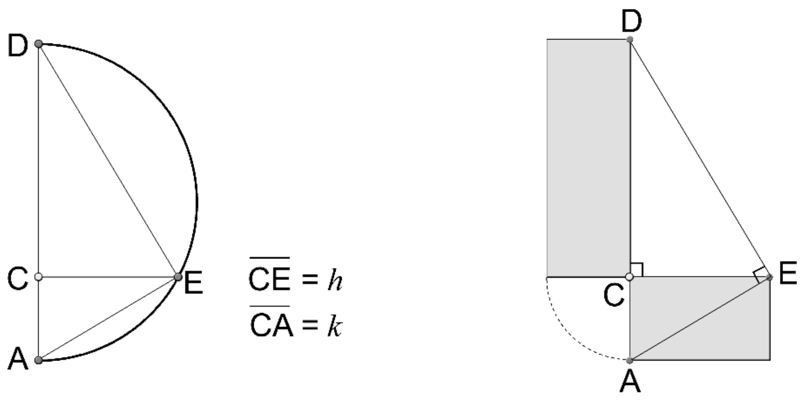
Posto $\alpha = 1$ e $k = 2$ studiare la funzione $y = \sqrt{\left|\frac{4-4x}{x}\right|}$ evidenziando in particolare le discontinuità, i punti di non derivabilità, ed eventuali massimi, minimi e flessi.

Nota: $\alpha = 1$ non è compatibile con il rapporto e/m dell'elettrone ma si riferisce a particella più pesante, quale ad esempio uno ione di monossido di carbonio (J. J. Thomson, Phil. Mag. Series 6, 1912, 24, 209).

Soluzione Problema Gruppo 4A

Punto 1

Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo AED, rettangolo in E,



si ottiene la proporzione

$$\overline{DC}:\overline{EC} = \overline{EC}:\overline{CA}$$

Sostituendo i simboli si ha:

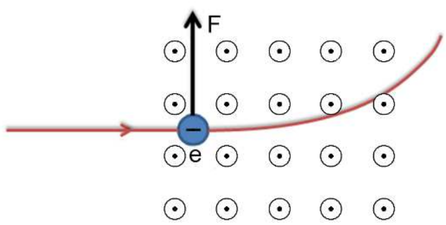
$$(2r-k):h = h:k$$

$$2r-k = \frac{h^2}{k}$$

$$r = \frac{h^2}{2k} + \frac{k}{2}$$

Punto 2

Il campo $\vec{B}$ deve essere uscente dal foglio e perpendicolare al foglio stesso. In tal modo la forza di Lorentz, che il campo $\vec{B}$ produce sulla carica in moto, essendo perpendicolare sia al vettore velocità che al vettore campo magnetico, è un vettore che giace sul piano del foglio.



La forza di Lorentz, essendo sempre perpendicolare alla velocità, produce su di essa solo accelerazione centripeta. Ne segue che il moto dell’elettrone è circolare uniforme.

Poiché la forza di Lorentz agisce come una forza centripeta, si può scrivere:

$$evB = \frac{mv^2}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{e}{m} = \frac{v}{Br}$$

Con i valori di v, B, h e k forniti dalla traccia si ha:

$$r = \frac{h^2}{2k} + \frac{k}{2} = 8{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

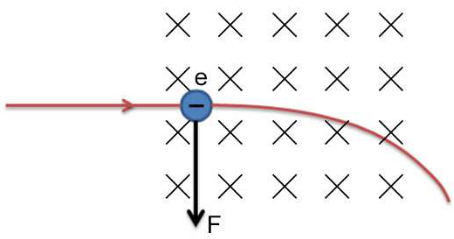
$$\frac{e}{m} = \frac{3{,}7\ \cdot 10^7 m/s}{2{,}6\ \cdot 10^{-3}\, T \cdot 8{,}1 \cdot 10^{-2}\, m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{C/kg}$$

Nella fase in cui l'elettrone accelera sotto l'effetto della differenza di potenziale ΔV, si può applicare il principio di conservazione dell'energia. Ne segue che:

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{2\left(\frac{e}{m}\right)\Delta V}$$

Variando la direzione del campo magnetico possono verificarsi le seguenti situazioni:

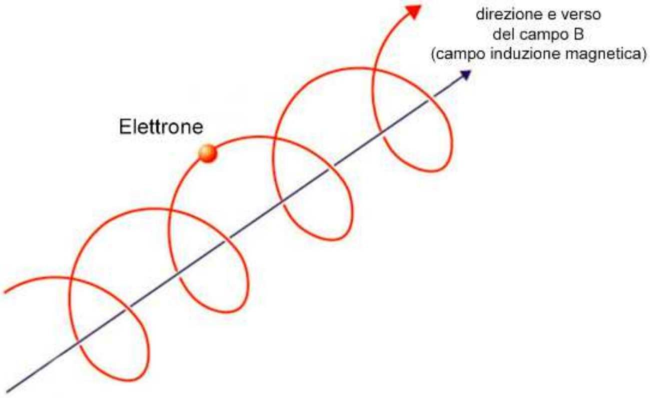
a) Se $\vec{B}$ è entrante nel foglio e perpendicolare al foglio stesso, il vettore forza di Lorentz continua giacere sul piano del foglio e ad imprimere all'elettrone un moto circolare uniforme che però si sviluppa in verso orario.



b) Se $\vec{B}$ è obliquo rispetto al foglio, il vettore velocità ha una componente $v_\perp$ perpendicolare al campo ed una componente $v_{/\!/}$ parallela al campo.

In questa situazione la forza di Lorentz è perpendicolare a $v_\perp$ ed imprime un moto circolare uniforme che si sviluppa su un piano obliquo rispetto al foglio. Questo moto circolare si compone con un moto rettilineo uniforme con velocità $v_{/\!/}$ nella direzione del campo.

Tale composizione di moti produce un moto elicoidale che si sviluppa in un verso o nel verso opposto a secondo del verso del campo magnetico.



Punto 3

Sostituendo $r = \frac{h^2}{2k} + \frac{k}{2}$ e successivamente $r = \frac{\alpha}{B}$ nell'espressione $\frac{e}{m} = \frac{V}{r \cdot B}$ si ottiene:

$$\frac{\alpha}{B} = \frac{h^2}{2k} + \frac{k}{2}$$

Da cui si ricava

$$\frac{h^2}{2k} = \frac{\alpha}{B} - \frac{k}{2}$$

$$h^2 = \frac{2k\alpha}{B} - k^2 = \frac{2k\alpha - k^2B}{B}$$

Per estrarre la radice quadrata occorre verificare la positività di $\frac{2k\alpha - k^2B}{B}$

$$\begin{cases} 2k\alpha - k^2B > 0 \\ B > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k(2\alpha - kB) > 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

Risulta $B > 0$ perché modulo del campo magnetico e $k > 0$ in quanto misura del segmento $\overline{CA}$. La prima disequazione si ricuce a:

$$2\alpha - kB \geq$$

$$2rB - kB \geq 0$$

$$B(2r - k) \geq 0$$

$$(2r - k) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2r = k$$

Questa disuguaglianza è positiva se *2r* è l'ipotenusa e *k* il cateto dello stesso triangolo. Questa affermazione coincide, con la situazione sperimentale, che la traiettoria degli elettroni intercetta la parete del tubo a vuoto (esistenza del punto $E \Rightarrow$ esistenza del triangolo con vertici AED).

Sotto queste condizioni, possiamo porre:

$$h = \sqrt{\frac{2k\alpha - k^2B}{B}}$$

Punto 4

Studiamo la seguente funzione:

$$y = \sqrt{\left|\frac{4-4x}{x}\right|}$$

Dominio:

$$D \equiv \mathbb{R} - \{0\}$$

Positività:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\left|\frac{4-4x}{x}\right|} = +2$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\left|\frac{4-4x}{x}\right|} = +\infty$$

Per $x = 0$ la funzione presenta una discontinuità di II specie.

Lo studio della derivata prima si può eseguire distinguendo i casi di positività del termine in valore assoluto.

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} & x < 0 \vee x \geq 1 \\ 2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} & x < 0 \vee x > 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Il dominio della derivata prima non comprende il punto $x = 1$ in quanto esso annulla il denominatore, pertanto occorre calcolare i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -\infty$$

Il valore della funzione in $x = 1$ è $f(1) = 0$.

quindi il punto $C(1,0)$ è un punto di non derivabilità e in particolare una cuspide.

Il segno della derivata prima è

$$f'(x) > 0 \text{ per } x < 0 \vee x > 1$$

$$f'(x) < 0 \text{ per } 0 < x < 1$$

Il punto C è anche un punto di minimo assoluto essendo la funzione sempre positiva o nulla.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x+3}{2x^2(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} & x < 0 \vee x > 1 \\ \dfrac{4-3x}{2x^2(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

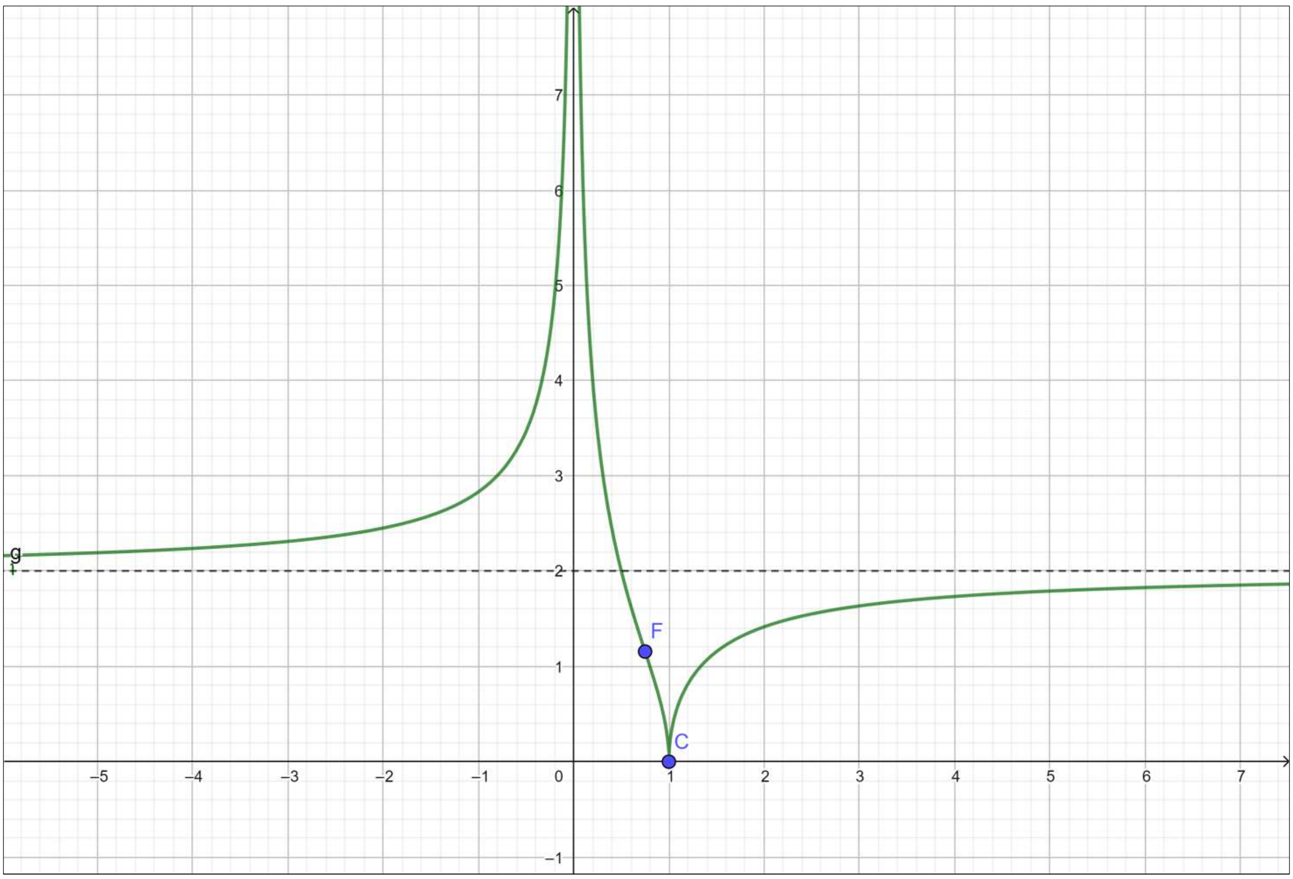
$$f''(x) > 0 \text{ per } x < 0 \ \vee 0 < x < \frac{3}{4}$$

$$f''(x) > 0 \text{ per } \frac{3}{4} < x < 1 \vee x > 1$$

$f''(x)$ si annulla e cambia segno in $x = \frac{3}{4}$,

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \simeq 1{,}15$$

Pertanto, $f(x)$ presenta un punto di flesso in $F\left(\frac{3}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.



Griglia di Valutazione Problema Gruppo 4A

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta **in modo superficiale e/o frammentario** formulando ipotesi esplicative **non adeguate senza riconoscere modelli** o analogie o leggi	**0 - 5**	• (2) Riconosce che deve applicare la forza di Lorentz. • (2) Riconosce la necessità di applicare la conservazione dell'energia. • (2) Individua le diverse casistiche in merito alla direzione del campo magnetico.	**5**
	L2	Esamina la situazione fisica proposta **in modo parziale** formulando ipotesi esplicative **non del tutto adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **non sempre appropriate**	**6 - 12**		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta **in modo quasi completo** formulando ipotesi esplicative **complessivamente adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **generalmente appropriate**	**13 - 19**		
	L4	**Esamina criticamente** la situazione fisica proposta in modo **completo ed esauriente** formulando ipotesi esplicative **adeguate** e riconoscendo modelli o analogie o leggi **appropriati**	**20 - 25**		
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	L1	Formalizza situazioni problematiche **in modo superficiale** e **non applica** gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione	**0 - 6**	• (1) Applica il teorema di Euclide. • (2) Imposta l'uguaglianza derivante tra la forza di Lorentz e la forza centripeta. • (2) Applica correttamente la regola della mano destra. • (2) Imposta correttamente l'equazione e ricava il valore della velocità. • (2) Sviluppa correttamente i diversi casi derivanti dalla direzione del campo magnetico rispetto alla velocità. • (3) Esegue correttamente il calcolo per l'espressione della funzione inversa. • (4) Studia in maniera corretta ed esauriente la funzione proposta.	**6**
	L2	Formalizza situazioni problematiche **in modo parziale** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **in modo non sempre corretto** per la loro risoluzione	**7 – 15**		
	L3	Formalizza situazioni problematiche **in modo quasi completo** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **generalmente corretto** per la loro risoluzione	**16 - 24**		
	L4	Formalizza situazioni problematiche **in modo completo ed esauriente** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **corretti ed ottimali** per la loro risoluzione	**25 - 30**		

Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo superficiale non verificandone** la pertinenza al modello scelto	**0 - 5**	• (2) Esegue un'analisi dimensionale dell'uguaglianza. • (4) Traccia il grafico della funzione in maniera completa e precisa. • (4) Individua correttamente i punti notevoli della funzione.	**5**
	L2	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo parziale** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo non sempre corretto**	**6 – 12**		
	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto**	**13 – 19**		
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo ed esauriente** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto ed ottimale**	**20 – 25**		
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	L1	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo superficiale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **appropriato** i risultati ottenuti **non** valutando la coerenza con la situazione problematica proposta	**0 - 4**	• (1) Giustifica adeguatamente la possibilità di applicare il teorema di Euclide. • (2) Giustifica che la forza centripeta è data dalla forza di Lorentz. • (3) Giustifica adeguatamente il passaggio relativo all'estrazione di radice. • (4) Giustifica puntualmente i risultati ottenuti nello studio di funzione.	**4**
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo parziale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **sempre appropriato** i risultati ottenuti valutandone **solo in parte** la coerenza con la situazione problematica proposta	**5 – 10**		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo** e comunica **con un linguaggio specifico** appropriato i risultati ottenuti valutandone **nel complesso** la coerenza con la situazione problematica proposta	**11 – 16**		
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo ed esauriente** e comunica **con un linguaggio specifico** appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta **in modo ottimale**	**17 – 20**		
		TOTALE			