Correzione prova "Il meccano"

19 febbraio 2019

Spiega la natura di questa corrente i individuandone il verso nelle varie fasi

Le correnti sono legate alla variazione del flusso del campo magnetico concatenato e seguono la legge di Faraday-Neumann-Lenz
$$i(t) = -\frac{1}{R_{tot}}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$
Più precisamente, la variazione del flusso concatenato risulta essere dovuta alla variazione della superficie del meccano, in quanto il campo magnetico $\vec{B}$ ha modulo costante. Dato che in una prima fase la superficie concatena aumenta e in una seconda fase diminuisce, la corrente circola in verso prima antiorario e poi in verso orario. Il verso della corrente è sempre tale da generare un campo magnetico indotto che si oppone alla variazione di flusso.

Durante la deformazione si riscontrano delle forze resistenti (diverse dagli attriti): spiega la natura di tali forze e perché devono opporsi alla deformazione.

La forza che si oppone può essere spiegata dal punto di vista delle correnti o dal punto di vista microscopico.
Dal punto di vista delle correnti, far variare la superficie del meccano genera delle correnti che risentono della forza $\vec{F}_{resistente} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ che complessivamente si oppongono alla forza agita dall'esterno.
Dal punto di vista microscopico, la deformazione del meccano sposta nel campo magnetico gli elettroni presenti all'interno delle sbarrette (che di fatto acquisiscono una velocità $\vec{v}$ non nulla rispetto al campo stesso) per cui risentono di una forza di Lorentz pari a $\vec{F}_{Lorentz} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Scrivi l'espressione della funzione $i(t)$ che esprime la corrente in funzione del tempo e disegnane il grafico in un opportuno nel piano cartesiano

In base a quanto detto sopra
$$i(t) = -\frac{1}{R_{tot}}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{1}{R_{tot}} f.e.m.$$
La resistenza totale R_{tot} del circuito è pari a quattro volte la resistenza della singola sbarretta
$$R_{tot} = 4R$$
All'istante t la superficie concatenata $A(t)$ del meccano risulta essere data da
$$A(t) = L^2 \sin(2\theta(t))$$
Il meccano si deforma con una velocità angolare costante per cui $\theta(t) = \omega t$.
Il campo magnetico risulta essere costante in modulo e in verso, e parallelo al vettore superficie del meccano, per cui:
$$\Phi(\vec{B})_A = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB$$
Risulta quindi che la corrente indotta $i(t)$ è pari a
$$i(t) = -\frac{1}{R_{tot}}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{1}{4R}\frac{d}{dt}\left(BL^2 \sin(2\omega t)\right) = \frac{\omega B L^2}{2R}\cos(2\omega t)\,.$$
Il grafico di questa funzione è il grafico di una funzione elementare ottenibile con una dilatazione su entrambi gli assi

Se $R = 1e-3$, $\omega = 1/$, B è il campo magnetico terrestre pari a $0,5e-4$, $L = 0,2$ calcola il valore medio della potenza elettrica erogata durante la fase da $t = 0$ a $t = t_{fin}$. Ritieni tale potenza sufficiente per ricaricare il tuo smartphone? Motiva la risposta.

Assumendo che per potenza del circuito si intenda la potenza associata alla f.e.m. indotta, possiamo dire che tale potenza P è

$$P = i \cdot f.e.m. = Ri^2(t) = R \cdot \left(\frac{\omega B L^2}{2R}\cos(2\omega t)\right)^2 = \frac{B^2L^4\omega^2}{R}\cos^2(2\omega t)$$

Il valore medio della potenza può essere ottenuto con il teorema della media integrale. Calcoliamo il tempo che ci impiega il meccano ad aprirsi: l'angolo complessivo risulta essere pari a $\pi/2$, e il sistema procede a velocità angolare costante ω per cui

$$t_{fin} = \frac{\pi/2}{\omega} = \frac{\pi}{2}s$$

La potenza media è data da

$$\overline{P} = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{t_{fin}} \frac{B^2L^4\omega^2}{R}\cos^2(2\omega t)dt = \frac{1}{\pi/2}\frac{\pi}{2\omega}\frac{B^2L^4\omega^2}{R} = \frac{B^2L^4\omega}{R} = e-9 \tag{1}$$

La potenza così ottenuta risulta essere decisamente molto più piccola rispetto a quella tipica di un caricatore da smartphone. Stimando infatti la potenza erogata da quest'ultimo come il prodotto dell'intensità di corrente nominale erogata (1) per la tensione (5), si ottiene una potenza $P_{caricatore} \simeq 5$. Stimando in un'ora il tempo necessario a ricaricare completamente uno smartphone di media categoria, e volendo adottare il meccano come caricatore, impiegheremmo un tempo pari circa a $e9$ ossia circa 1000 anni. La risposta è quindi negativa.

Detta x l'ascissa del punto C, vertice superiore del rombo, verifica che l'area della superficie del telaio al variare di x può essere descritta dall'espressione $S(x) = 2|x|\sqrt{L^2 - x^2}$

Le coordinate del punto C, per il teorema di Pitagora, sono $C = (x, \sqrt{L^2 - x^2})$. La lunghezza del segmento $\overline{OA}$ è pari a due volte il modulo dell'ascissa del punto C. La superficie è pari al doppio dell'area del triangolo ACO ed è data da:

$$S = 2\left(\frac{\overline{AO} \cdot y_C}{2}\right) = 2|x|\sqrt{L^2 - x^2}.$$

Studia la funzione $S(x)$ nel suo dominio determinandone i punti stazionari e discutendone la derivabilità, e tracciane il grafico.

Assumiamo che la funzione $S(x)$ sia scorrelata dal suo significato iniziale.
Il dominio è dato dalla condizione di esistenza della radice: $L^2 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -L \leq x \leq L$. In tale dominio la funzione è continua e non presenta discontinuità.
La funzione è pari; infatti:

$$S(-x) = 2|-x|\sqrt{L^2 - (-x)^2} = 2x\sqrt{L^2 - x^2} = S(x)\,.$$

Effettueremo lo studio solo nell'intervallo $[0; L]$.
In tale intervallo $S(x)$ risulta essere positiva e si annulla nei punti $x = 0$ e $x = L$.
La derivata $S'(x)$ è pari a

$$S'(x) = 2\frac{L^2 - 2x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}}\,.$$

La derivata risulta non essere definita per $x = L$, valore per cui il denominatore si annulla.
$S'(x)$ è positiva se il numeratore è positivo, ossia quando $L^2 - 2x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}L}{2}$, mentre è negativa per $\frac{\sqrt{2}L}{2} < x < L$. Lo studio del segno evidenzia quindi la presenza di un massimo M di

coordinate $M = \left(\frac{\sqrt{2}L}{2}; L^2\right)$.

Studiamo i due punti estremi dell'intervallo $[0; L]$.
Nel punto $x = 0$ la $S(x)$ ha una tangente t data da

$$t:\ y = S'(0)x + S(0) = 2Lx$$

Il punto $x = L$ è un punto di non derivabilità; si ha infatti che

$$\lim_{x\to L^-} 2\frac{L^2 - 2x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}} = -\infty\,.$$

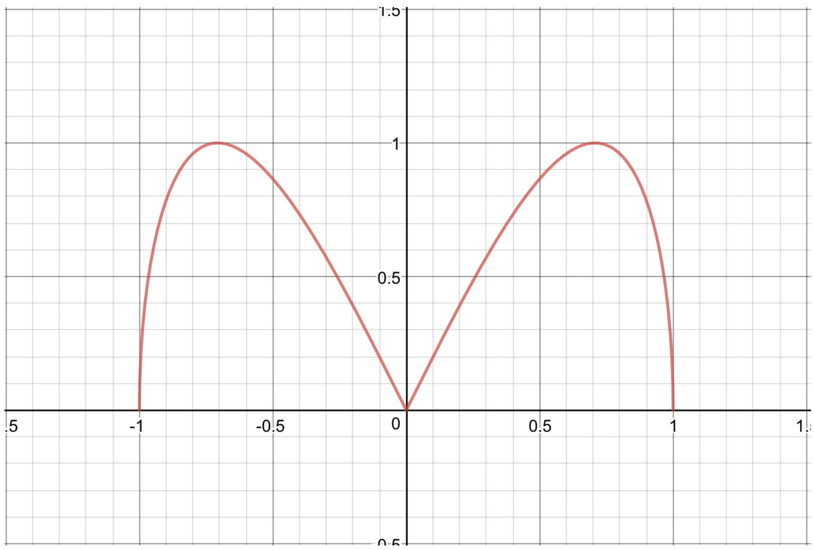
Passiamo a studiare la derivata seconda $S''(x)$; otteniamo esplicitamente

$$S''(x) = \frac{dS'(x)}{dx} = 2x\frac{2x^2 - 3L^2}{(L^2 - x^2)^{3/2}}$$

Questa funzione è minore di zero in ogni punto appartenente all'intervallo $(0; L)$. Per il dominio, il denominatore risulta essere sempre positivo, x è positivo e il fattore $2x^2 - 3L^2$ risulta essere sempre negativo.
La funzione ha una concavità rivolta verso il basso. Si annulla invece per $x = 0$, che corrisponde ad un punto angoloso dato dalla presenza del modulo. Di seguito le tangenti t e t':

$$t:\ y = 2Lx\,, \qquad t':\ y = -2Lx\,.$$

Di seguito il grafico con tutte le informazioni per $L = 1$.



Detti M il massimo della funzione $S(x)$ e G il punto di coordinate $(L; 0)$, calcola la probabilità che, scelto a caso un punto Q nella regione di piano Σ delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse, Q si trovi all'interno del triangolo di vertici OMG.

Valutiamo la probabilità secondo la definizione di casi favorevoli su casi possibili. I casi favorevoli corrispondono all'area del triangolo OMG, pari $A(OMG) = \frac{1}{2}L \cdot L^2 = \frac{1}{2}L^3$.
I casi possibili corrispondono alla porzione di piano compresa fra il grafico di $S(x)$ e l'asse delle ascisse pari a

$$A_{tot} = \int_{-L}^{L} |S(x)| dx = 2\int_0^L \left(2x\sqrt{L^2 - x^2}\right) dx =$$
$$= -2\int_0^L \left(-2x(L^2 - x^2)^{1/2}\right) dx = 2\left[-\frac{(L^2 - x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^L = \left[-\frac{4}{3}\sqrt{L^2 - x^2}\right]_0^L = \frac{4}{3}L^3\,.$$

La probabilità $\mathcal{P}$ richiesta risulta quindi essere data da

$$\mathcal{P} = \frac{A(OMG)}{A_{tot}} = \frac{L^3/2}{4L^3/3} = \frac{3}{8}$$